16294 6
C18
6

DIE RECHNUNG
DES
WAHRSCHEINLICHEN

AUS DEM FRANZÖSISCHEN

DES

HERRN C. F. DE BICQUILLEY

ÜBERSETZT

UND

MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN

VON

M. CHRIST. FRIEDR. RÜDIGER

Nebst einer Kupfertafel.

LEIPZIG

BEI ENGELHARD BENJAMIN SCHWICKERT

1788

VORREDE.

Analysis und Geometrie sind die anerkannt einzigen Wegweiser, welche uns sicher zur Erkenntniss der Wahrheit führen. Die Anwendungen derselben in unsern Zeiten auf verschiedene Gegenstände der menschlichen Kenntnisse haben das Reich des Wahnes und der blossen Meinungen sehr geschwächt. Strenge und Genauigkeit ist an die Stelle wüster Spekulationen eingetreten, und einige gewisse Wahrheiten an die Stelle einer grossen Menge blinder Vorurtheile und sinnreicher Irrthümer. Auch kann man mit Grunde hoffen, dass der menschliche Geist in dieser seiner Laufbahn nicht stehen bleiben werde, und dass die Rechnungs-Methode sich dereinst auch über solche Gegenstände ausbreiten werde, worauf sie uns noch jetzt sehr wenig anwendbar vorkommt, und wobei unsere Begriffe in Richtigkeit zu bringen, sie auf feste Gründe zu stellen, für uns von äusserster Wichtigkeit ist. Die bisher misslun-

genen Verſuche beweiſsen weiter nichts als die Schwierigkeit der Sache; ſie können ſogar dienen, glüklichern Bemühungen den Weg zu bahnen, indem ſie die Klippen zeigen, woran andere vorher geſcheidert ſind.

Das menſchliche Erkenntniſs-Vermögen hat freilich ſeine natürlichen ihm angewieſenen Schranken, und es giebt Gegenſtände, ſelbſt ſolche, die uns überaus wichtig ſind, wobei wir auf immer zu zweifeln gezwungen ſein werden, und wobei wir uns blos an Wahrſcheinlichkeit halten müſſen. Bei der Wahrſcheinlichkeit aber läſst ſich der Begrif von minder und mehr, das iſt, der Begrif von Gröſse anbringen; ſie hat nämlich alle Eigenſchaften, welche der Gröſse zukommen, Verhältniſſe der Gleichheit und Ungleichheit; es giebt auch bei ihr Grenzen des Gröſsten und Kleinſten, welche die abſolute Gewiſsheit auf der einen, und die anerkannte Unmöglichkeit auf der andern Seite ſind. Dies unterwirft ſie der Geometrie und der Berechnung.

Ueberzeugt, daſs die bereits von berühmten Mathematikern zu bearbeiten angefangene Theorie der Wahrſcheinlichkeiten voll-

ſtändiger ausgeführt, und als ein Theil des Elementar-Unterrichts den mathematiſchen Anfangsgründen beigefüget werden könne, glaubten wir, daſs eine Schrift, welche diese wiſſenswerthe Materie mit neuen Wahrheiten bereichern, und vielen Leſern recht verſtändlich machen könnte, nicht unwürdig zu ſein ſcheinen würde, dem Publikum vorgelegt zu werden. *)

Wir ſind aber weit entfernt, zu behaupten, als ob die Berechnung der Wahrſcheinlichkeiten auf einen ſolchen Grad von Vollkom-

) Der Innhalt derſelben iſt in dieſer deutſchen Ueberſetzung zuförderſt in ſo fern abgeändert worden, daſs zwölf Kapitel aus ſieben des Originals gemacht worden ſind, um die einzelnen Materien mehr abzuſondern, und einigermasſen umſtändlicher abhandeln zu können. Die hinzugekommenen Anmerkungen und Zuſätze ſind theils im Texte ſelbſt, theils in einigen unter ihm befindlichen Noten eingeſchaltet, und um dieſelben von der Arbeit des franzöſiſchen Verfaſſers zu unterſcheiden, mit Sternchen () bezeichnet. Wir ſchmeicheln uns, daſs man dieſe geringen Veränderungen darum nicht miſsbilligen werde, weil deutlich zu ſein, und Zweifeln durch weitläuftigere Auseinanderſetzungen der vorgetragenen Lehren zu begegnen, unſer vorzügliches Augenmerk hiebei geweſen iſt; um weniger geübten Leſern Zeit des Nachdenkens über Auflöſungen und Zergliederungen erregter Schwierigkeiten zu erſparen, und ſie geſchwinder zu fernern Wahrheiten fortzueilen geſchikt zu machen.

Anm. d. Ueberſ.

menheit von uns gebracht worden wäre, auf welchen nur fernere Unterſuchungen groſser Geiſter, und mehrere Erfahrungen ſie künftig erheben dürften. Ob nun gleich die Verſuche eines Liebhabers mit Meiſterſtüken in gar keine Vergleichung kommen können; ſo wird man doch dieſe meine Arbeit nicht für ſchlechterdings unnütz halten, wenn ich einige Vorſchritte in dieſer Laufbahn gemacht, und etwas zum weitern Fortgange in der Kunſt zu muthmaſsen, und die Ungewiſsheit gewiſſen Regeln zu unterwerfen, beigetragen habe.

Innhalt.

KAPITEL I. *Erklärungen und Fundamentalsätze.* Seite 1

KAPITEL II. *Von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.* 10

Diese zwei Kapitel enthalten ausser den ersten Grundlehren der Rechnung des Wahrscheinlichen, die Erklärungen der Begriffe von *gewiss, möglich, unmöglich, wahrscheinlich,* und andern Ausdrüken dieser Art, welche gemeiniglich viel öfterer gebraucht und ausgesprochen, als ganz richtig verstanden werden.

KAPITEL III. *Von den figurirten Zahlen.* 21

*Diese Zahlen sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von vorzüglichem Nutzen, und der Hauptgegenstand dieses Kapitels ist, eine Formel für die Summe der Potenzen einer Reihe figurirter Zahlen zu finden.

KAPITEL IV. *Die Erwartung.** 43

Dieses Kapitel enthält eine leichte Anwendung der bisherigen Lehren auf die Berechnung der zwanzigsten Leipziger Klassen-Lotterie.

KAPITEL V. *Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle zugleich ereignen.* 55

KAPITEL VI. *Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle hinter einander in einer bestimmten Ordnung ereignen.* 88

KAPITEL VII. *Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, bei mehrern Versuchen.* 155

Diese drei Kapitel halten eine höchst allgemeine analytische Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung in sich. Ordnung und Deutlichkeit haben wir uns hier zu vereinigen bemüht, jeden einzelnen Satz auf Beispiele angewendet, und ihn dadurch mehr ins Licht zu setzen, und den Gebrauch davon zu zeigen gesucht.

Kapitel VIII. *Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, mittelst Analyse der vorgelegten Fragen.* Seite 246

Kapitel IX. *Vom Lotto.* 252

Kapitel X. *Geometrische Aufgaben.* 261

In diesen drei Kapiteln werden ins besondere die Anwendungen gezeigt, welche sich von der vorgetragenen Theorie auf die Auflösung von Fragen machen lassen, die auf die am meisten gewöhnlichen Glüksspiele ihre Beziehung haben; und einige Sätze der gemeinen und höhern Geometrie zur Untersuchung der Wahrscheinlichkeiten gebraucht.

Kapitel XI. *Berechnung der Wahrscheinlichkeiten durch Erfahrungen oder Beobachtungen.* 280

Dieses Kapitel zeigt, wie sich der Untersuchung der Grösse von Wahrscheinlichkeiten durch die Erfahrung zu Hülfe kommen läfst, wenn die aufgegebenen Fragen ihrer Natur nach nicht so beschaffen sind, dafs sie einer ganz strengen Rechnung unterworfen werden können.

Kapitel XII. *Von dem Einfluſs der Zeugniſse auf die Wahrscheinlichkeiten.* 298

Es ist dieses Kapitel ein Versuch, wie der Einfluſs der Zeugniſſe für oder wider eine wirkliche Begebenheit auf die Wahrscheinlichkeit derselben zu berechnen ist.

DIE

DIE WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG.

Kapitel I.

Erklärungen und Fundamentalsätze.

§. 1.

Unter den verschiedenen Bewegungen, Handlungen oder Zuständen von Dingen vor unsern Augen, giebt es solche, davon wir das Resultat, die Folge oder Wirkung mit Gewissheit bestimmen können; es sei nun aus vielfältigen Erfahrungen, die bei andern ähnlichen Bewegungen, Handlungen oder Zuständen von Dingen gemacht worden sind, oder einer aus Vernunftschlüssen hergeleiteten Kenntniss der Gesetze, wodurch sie bestimmt werden. Diese Wirkungen, Folgen oder Resultate heissen *gewiss*.

§. 2.

Es giebt andere Bewegungen, Handlungen oder Zustände von Dingen, davon wir die Resultate, Folgen, oder Wirkungen nicht mit Gewissheit bestimmen können. Dergleichen Resultate, Folgen, oder Wirkungen werden *Glüksfälle* oder *Glüksbegebenheiten* (*hazards*) genannt.

§. 3.

Unter den verschiedenen Bewegungen, Handlungen, oder Zuständen von Dingen, deren Folge oder Wirkung wir nicht mit Gewissheit bestimmen können, giebt es solche, wovon wir verschiedene Resultate anzugeben vermögend sind, die wir *mögliche* nennen, unter

welchen wir versichert sind, dass sich die unbekannte Wirkung befindet, und ausser welchen wir eben so versichert sind, dass diese Wirkung sich nicht befindet.

Dieses durch ein Beispiel sinnlich zu machen, wollen wir annehmen, dass Peter zwei gemeine Spielwürfel in einem Becher herumschüttele, um sie blindlings heraus auf eine Tafel zu werfen: ehe nun der Wurf geschehen, so ist das Resultat davon, nämlich die bestimmte Anzahl der Augen, die Peter werfen wird, unbekannt; man weiss aber, dass es 36 *mögliche* Resultate giebt, unter welchen man gewiss ist, dass die von Peter geworfenen Augen sich befinden werden, und ausser welchen man ebenfalls gewiss ist, dass sie sich nicht befinden werden. Denn der Würfel A hat 6 mögliche Lagen, so dass von ihm sechs verschiedene Mengen der Augen oben fallen können; und zu jeder Anzahl von Augen, die mit diesem Würfel hervorgebracht worden, können sechs verschiedene Mengen von Augen mit dem Würfel B hinzugeworfen werden: woraus man siehet, dass es bei einem Wurfe mit zwei Würfeln 6 mal 6 oder 36 Fälle giebt, die einzig möglich sind.

§. 4.

Zwei oder mehrere *gleich mögliche* Resultate sind, wenn kein Grund vorhanden ist, der zu dem Geschehen des einen mehr Hofnung, als zu dem Geschehen des andern giebt.

So ist auf einen Wurf mit zwei Würfeln, 5 und 4 Augen, ingleichen 1 und 3 Augen zu werfen, gleich möglich, weil jegliches Paar Augen auf folgende beide Arten hervorgebracht werden kann: nämlich um 5 und 4 zu werfen, entweder der erste Würfel 5 und der andere 4, oder der erste Würfel 4 und der andere 5; um 3 und 1 zu werfen, entweder der erste Würfel 3 und der andere 1, oder der erste Würfel 1 und der andere 3.

Hingegen 5 und 4 Augen, und 3 und 3 zu werfen, sind nicht gleich möglich, weil jenes auf zweierlei Arten,

die wir eben angezeigt haben, aber das zweite nur auf eine einzige Art, wenn nämlich von jedem Würfel 3 Augen oben fallen, hervorgebracht werden kann.

Sechs Augen und acht Augen ſind gleich möglich, weil alle beide auf fünf Arten hervorgebracht werden können; nämlich 6 durch 5 und 1, 4 und 2, 3 und 3, 2 und 4, 1 und 5; und 8 durch 6 und 2, 5 und 3, 4 und 4, 3 und 5, 2 und 6.

Hingegen 7 Augen und 8 Augen ſind ungleich möglich, weil 7 Augen auf ſechs verſchiedene Arten geworfen werden können; nämlich durch 6 und 1, 5 und 2, 4 und 3, 3 und 4, 2 und 5, 1 und 6; anſtatt daſs 8 Augen nur auf fünf Arten, die bereits genannt worden, hervorgebracht werden können.

§. 5.

Fälle werden alle die gleich möglichen Reſultate genannt, worunter man verſichert iſt, daſs eine angegebene Glüksbegebenheit ſich befindet, und auſser welchen man gewiſs iſt, daſs ſie ſich nicht befindet. So giebt es bei einem Wurfe mit zwei Würfeln 36 *Fälle*, worunter alle Glüksbegebenheiten, die ein ſolcher Wurf irgend geben kann, befindlich ſind.

§. 6.

Aus dieſer Erklärung der *Fälle* folgt, daſs, wenn man in der Berechnung der Glüksbegebenheiten, die Summe aller *Fälle*, oder einer gewiſſen Menge von *Fällen*, worunter dieſe Begebenheiten befindlich ſind, ausmachen will; man Achtung geben müſſe, daſs die Reſultate, welche man abzählet, alle gleich möglich ſind.

§. 7.

Aus den obigen Erklärungen kann man ſchlieſsen, daſs es keine abſolute Glüksbegebenheiten gebe; ſondern daſs dieſes Wort nur auf die Unwiſſenheit desjenigen, der es gebrauchet, ſich beziehe. Da ſich alles in der Natur nach beſtändigen Geſetzen und gegebenen Kräften bewegt, die das Reſultat einer jeden Handlung, Be-

wegung, oder eines jeden Zustandes bestimmen; so würde es für ein verständiges Wesen, dem diese Gesetze vollkommen bekannt wären, gar keinen Glüksfall geben, sondern für selbiges alles gewiss sein.

Eben dieses lässt sich von der Möglichkeit sagen, die nicht eine innere Eigenschaft derjenigen Begebenheiten, die wir möglich nennen, sondern nur der Ausdruk unserer Unwissenheit ist, ob diese Begebenheiten existirt oder nicht existirt haben, existiren oder nicht existiren, existiren werden oder nicht existiren werden. Wollte man mit der Idee von der Möglichkeit einer Sache die Idee einer Ursache, die fähig ist, sie existiren zu machen, verbinden, so würde dieses ein offenbarer Irrthum sein; denn eine wahre Ursache kann nicht ohne ihre Wirkung existiren, und in solcher Voraussetzung würde nichts möglich sein, als was wirklich existirt.

§. 8.

Wir entschliessen uns öfters, zu Folge einer Voraussetzung von Thatsachen oder Begebenheiten, wovon wir nicht vermögend sind, die Realität mit Gewissheit zu behaupten, und die in Beziehung auf uns blos möglich sind. Die Voraussetzung, dass diese Begebenheiten existirt haben, oder existiren, oder existiren werden, heisst *Vermuthung* oder *Muthmassung*. Demnach ist vermuthen oder muthmassen nichts anders, als eine in Beziehung auf uns nur mögliche Begebenheit als reel voraussetzen, auf die Gefahr, wenn die Voraussetzung falsch ist, uns zu betrügen, und den Zwek zu verfehlen, den wir uns dabei vorgesetzt haben.

§. 9.

Eine *Wette* ist ein Vertrag, wodurch zwei Partheien, die eine auf das Geschehen, die andere auf das Nichtgeschehen einer bestimmten möglichen Begebenheit, eine gewisse Geldsumme verpfänden, so dass diejenige, deren Behauptung zutrift, die von der andern ausgesetzte Summe erhält.

Zum Beiſpiel. Wenn Peter, der aus einem Becher zwei gemeine Spielwürfel auf einen Tiſch werfen will, ſich verbindet, im Fall er einen Paſch werfen ſollte, an Paul einen Thaler auszuzahlen: und Paul hingegen verſpricht dreimal ſo viel Petern zu bezahlen, wenn lauter ungleiche Augen zum Vorſchein kommen: ſo iſt ein ſolcher Vergleich eine Wette.

§. 10.

Die *Wahrſcheinlichkeit* einer Begebenheit iſt die Verhältniſs der Anzahl der Fälle, welche dieſe Begebenheit geben, zur Menge aller Fälle, worunter eben dieſe Begebenheit befindlich iſt.

Zum Beiſpiel. Auf einen Wurf mit zwei Würfeln iſt die Wahrſcheinlichkeit

12 Augen oder 2 Sechſen zu werfen $= \frac{1}{36}$;
11 Augen zu werfen $= \frac{2}{36}$ oder $\frac{1}{18}$;
10 Augen zu werfen $= \frac{3}{36}$ oder $\frac{1}{12}$;
9 Augen zu werfen $= \frac{4}{36}$ oder $\frac{1}{9}$;
8 Augen zu werfen $= \frac{5}{36}$;
7 Augen zu werfen $= \frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$;
5 und 5 zu werfen $= \frac{1}{36}$;
5 und 4 zu werfen $= \frac{2}{36}$ oder $\frac{1}{18}$;
einen Paſch zu werfen $= \frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$;
ungleiche Augen zu werfen $= \frac{30}{36}$ oder $\frac{5}{6}$;

weil unter den 36 Fällen, die von dem Werfen mit zwei Würfeln abhängen, ein Fall befindlich iſt, der 12 Augen giebt; 2 Fälle befindlich ſind, die 11 Augen; 3 die 10; 4 die 9; 5 die 8; 6 die 7 Augen geben; 1 Fall der 5 und 5 giebt; 2 die 5 und 4; 6 die einen Paſch; und 30, die lauter ungleiche Augen geben.

§. 11.

Hieraus folgt, daſs die Wahrſcheinlichkeiten verſchiedener Begebenheiten, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, ſich unter einander wie die Mengen der Fälle, die ſolche Begebenheiten geben, verhalten.

Zum Beiſpiel. Bei einem Wurfe mit zwei Würfeln verhält ſich die Wahrſcheinlichkeit eines Paſches zu der, ungleiche Augen zu werfen, wie 6 zu 30, oder $= 1:5$.

§. 12.

Es bedeute überhaupt $\frac{n}{m}$ die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit: ſo wird dieſe Wahrſcheinlichkeit um ſo gröſser oder kleiner, je nachdem n wächſt oder abnimmt, indem der Nenner m ebenderſelbe bleibt. Für $n = m$, oder $\frac{n}{m} = 1$, iſt die Begebenheit gewiſs; weil in dem Falle alle Fälle vortheilhaft ſind. Für $n = o$, oder $\frac{n}{m} = o$, iſt die Begebenheit unmöglich, oder, welches einerlei iſt, das Nichtgeſchehen dieſer Begebenheit iſt gewiſs.

§. 13.

Es folgt hieraus, daſs die Wahrſcheinlichkeit niemals gröſser als die Einheit, noch kleiner als o, das iſt, verneint ſein kann: aber daſs ſie durch alle Werthe und Stufen der Gröſse, ſo zwiſchen o und 1 fallen, durchgehen kann.

§. 14.

Wenn $\frac{n}{m}$ die Wahrſcheinlichkeit bedeutet, daſs eine Begebenheit geſchiehet, ſo iſt $\frac{m-n}{m}$ die *entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit*, oder die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſe Begebenheit nicht geſchiehet; weil, wenn n die Anzahl derjenigen Fälle anzeigt, die dieſe Begebenheit geben, $m-n$ offenbar die Anzahl der Fälle iſt, welche dieſe Begebenheit nicht geben.

§. 15.

Wenn man die Wahrſcheinlichkeit irgend einer Begebenheit zu der entgegengeſetzten Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit addirt, ſo iſt allemal die Summe dieſer Wahrſcheinlichkeiten = 1. Denn $\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} = 1$; welches ſchon daraus erhellet, weil es ſtets gewiſs iſt, daſs eine beſtimmte Begebenheit entweder geſchiehet oder nicht geſchiehet.

§. 16.

Eine Art von Bewegung oder Handlung, die mehrere mögliche Reſultate hat, kann zwei- drei- vier- oder noch mehrmal wiederholet werden. Eine jede ſolche Wiederholung wollen wir einen *Verſuch* nennen.

Zum Beiſpiel. Wenn in einem Beutel 90 Kugeln enthalten ſind, die man unter einander gemiſcht, und deren jede mit einer beſondern Nummer bezeichnet hat, dergleichen diejenigen Kugeln ſind, die im Lottoſpiel gebraucht werden, und jemand blindlings und ohne zu wählen fünf dieſer Kugeln herauszieht, alsdann wieder in den Beutel zurükwirft, und dieſes mehrmal wiederholet; ſo heiſsen dieſe Wiederholungen *Verſuche*.

§. 17.

Die Wahrſcheinlichkeit einer Sache iſt auch die Wahrſcheinlichkeit des Satzes, welcher das Geſchehen derſelben behauptet: dergeſtalt, daſs eine Begebenheit und der Satz, welcher ihre Exiſtenz behauptet, beide mehr oder weniger wahrſcheinlich, oder glaubhaft, oder annehmlich ſind, je nachdem die Verhältniſs der Zahl der Fälle, welche ſolche Begebenheit geben, zur Menge aller Fälle, worunter ſie befindlich iſt, ſich mehr der Einheit nähert, oder von ihr entfernet. Man muſs jedoch bedenken, daſs die Wahrheit und Falſchheit der Begebenheiten und der Sätze, welche ſolche behaupten, durch die Wahrſcheinlichkeit nur in den einzigen Fällen noth-

wendig beſtimmt werden, wo die Wahrſcheinlichkeit $= o$ oder 1 iſt; auſserdem entſcheidet, nach der Strenge genommen, die Wahrſcheinlichkeit nichts über die Realität der Begebenheiten, und zuweilen trägt ſich juſt das zu, welches das weniger wahrſcheinliche iſt. Es iſt unterdeſſen gewiſs, daſs die öftere Wiederereigniſs ebenderſelben Begebenheiten bei einer Menge von Verſuchen, der Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheiten ohngefähr proportional iſt; daſs uns die Vermuthungen um ſo weniger einem Irrthum ausſetzen, und uns um ſo ſeltener betrügen, je wahrſcheinlicher die vermutheten Begebenheiten ſind.

§. 18.

Eine *rechtmäſsige Wette* heiſst, bei welcher die Miſen oder die Summen, welche die Wettenden verpfändet haben, ſich unter einander wie die Wahrſcheinlichkeiten der Begebenheiten verhalten, auf deren Wirklichkeit jene Summen geſetzt worden ſind.

Geſetzt daſs Peter eine Summe s auf das Geſchehen einer Begebenheit ſetzt, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{n}{m}$ iſt; ſo muſs die Miſe des Paul, welcher auf das Nichtgeſchehen dieſer Begebenheit wettet, damit die Wette rechtmäſsig wird, $s.\frac{m-n}{n}$ ſein: denn wenn die Miſe des Paul x genannt wird, ſo hat man folgende Proportion: Die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Peter wettet, verhält ſich zur Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Paul wettet, wie ſich verhält die Miſe des Peter zur Miſe des Paul; oder welches einerlei iſt, $\frac{n}{m} : \frac{m-n}{m} = s : x$, wo man $x = s.\frac{m-n}{n}$ findet.*)

*)Oder (nach §. 11.) $n : (m-n) = s : x$, das heiſst, die Miſe des Peter verhält ſich zur Miſe des Paul, wie die Summe der günſtigen Fälle für den Peter zu der Summe der widrigen

§. 19.

Wenn bei einer rechtmäfsigen Wette die Mise des einen Spielers nebst der Wahrscheinlichkeit der einen Begebenheit gegeben ist, so kann man daraus die Mise des andern Spielers und die Wahrscheinlichkeit der andern Begebenheit leicht herleiten. So wird, wenn die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Peter wettet, $= \frac{1}{6}$, und die Mise des Paul $= 15$ ist; die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Paul wettet, $= \frac{5}{6}$, und die Mise des Peter $= 3$ sein.

§. 20.

In einer rechtmäfsigen Wette müssen die Misen einander gleich sein, wenn die Wahrscheinlichkeit einer jeden Begebenheit $= \frac{1}{2}$ ist; und umgekehrt, wenn die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ ist, und die Misen einander gleich sind, so ist die Wette rechtmäfsig.

§. 21.

Es ist zu merken, dafs die Rechtmäfsigkeit einer Wette voraussetzt, dafs die Wahrscheinlichkeiten der Begebenheiten, welche der Gegenstand der Wette sind, von den Wettenden auf einerlei Art gefunden worden: aufserdem würde die Rechtmäfsigkeit leiden, selbst im moralischen; gänzlich aber aufgehoben würde sie sein, wofern einer der Wettenden von der Begebenheit, auf welche er wettet, gewifs wäre.

§. 22.

Ferner ist zu merken, dafs diese numerische Rechtmäfsigkeit der Wetten in Betracht der Wettenden selten die Gleichheit der physischen Vortheile und Nachtheile begreift; weil physischer Vortheil und Nachtheil, der mit einem gewissen Gewinn oder Verlust verbunden ist, bei der verschiedenen Beschaffenheit der Vermögensumstände der Wettenden, selten den gewonnenen oder verlornen Summen proportionirt ist. Ein Mensch, zum

Fälle für ebendenselben, oder zu der Summe der günstigen Fälle für den Paul. *Anm. d. Uebers.*

Beispiel, dessen ganzes Vermögen 5000 Gulden ausmachte, die zu Bestreitung aller seiner Bedürfnisse zureichten, würde, obschon bei gleichem Spiele, doch mit sehr grossem Nachtheile, diese Summe gegen den Besitzer von einer Million setzen, für den der Gewinn oder Verlust dieser Summe fast von keinem Belang ist; in Erwägung, dass kein gegenseitiges Aufheben des Vortheils gegen den Nachtheil statt findet, wenn es auf die Gewinnung des Ueberflüssigen, und den Verlust des Nothwendigen ankommt; In diesem Sinne dürfte demnach keine Wette, als höchstens nur in dem Falle rechtmässig sein, wenn die Wettenden in gleichen Glüksumständen sich befinden, und ihr Wohlstand von den aufs Spiel gesetzten Geldsummen unabhängig ist.

Kapitel II.

Von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

§. 1.*

Aufgabe. *Zu finden, wie oft unter allen möglichen Würfen, von einem Würfel bis auf sechse, u. s. w. jede mögliche Anzahl Augen geworfen werden kann.*

Auflösung. I. Bei einem Würfel giebt es 6 verschiedene gleich mögliche Fälle: 1, 2, 3, 4, 5, 6; weil er von 6 Seiten eingeschlossen wird, und man annimmt, dass er eine vollkommen würflichte Gestalt habe. Für zwei Würfel ist die Anzahl aller möglichen Fälle = 36. (Kap. I. §. 3.) Desgleichen ist die Anzahl aller möglichen Würfe mit 3 Würfeln = 216; weil, wenn mit dem ersten und zweiten Würfel einer von den vorhin genannten 36 Fällen sich ereignet, zu gleicher Zeit irgend einer von den sechs verschiedenen Fällen des dritten Würfels sich ereignen kann. Und so erhellet ferner, dass durch jeden hinzukommenden Würfel die Anzahl

der Fälle bei den vorigen Würfeln sechsmal vermehret wird. Es ist also

für Würfel	die Anzahl aller möglichen Fälle
1	$6 = 6$
2	$6^2 = 36$
3	$6^3 = 216$
4	$6^4 = 1296$
5	$6^5 = 7776$
6	$6^6 = 46656$
.	.
.	.
.	.
n	6^n

II. Bei zwei Würfeln muss um $\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}$ zu werfen, jeder Würfel $\left\{\begin{matrix}\text{ein Ass}\\\text{eine Sechse}\end{matrix}\right\}$; um $\left\{\begin{matrix}3\\11\end{matrix}\right\}$ zu werfen, entweder der Würfel *A* $\left\{\begin{matrix}\text{ein Ass}\\\text{eine Fünfe}\end{matrix}\right\}$ und der Würfel *B* $\left\{\begin{matrix}\text{eine 2}\\\text{eine 6}\end{matrix}\right\}$, oder *A* $\left\{\begin{matrix}\text{eine 2}\\\text{eine 6}\end{matrix}\right\}$ und *B* $\left\{\begin{matrix}\text{ein Ass}\\\text{eine Fünfe}\end{matrix}\right\}$; um $\left\{\begin{matrix}4\\10\end{matrix}\right\}$ zu werfen, entweder *A* $\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right\}$ und *B* $\left\{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right\}$ Augen, oder *A* $\left\{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right\}$ und *B* $\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right\}$ Augen, oder *A* $\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\}$ und B $\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\}$ Augen geben. Verfährt man eben so, die noch übrigen Summen der Augen zu finden; so ergiebt sich, dass mit 2 Würfeln geworfen werden können:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Augen
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	mal.

Und eben so findet man, dass mit 3 Würfeln geworfen werden können:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18 Aug.
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1 mal.

III. Um aber für jede Anzahl Würfel zu finden, wie oft unter allen möglichen Würfen jede mögliche Anzahl Augen geworfen werden könne, erwäge man folgendes:

a) Da durch jeden hinzukommenden Würfel die Anzahl der Fälle bei der vorigen Anzahl Würfel um 6 vervielfacht wird (I); so muſs die Anzahl der Würfe bei der vorigen Anzahl Würfel 6 mal genommen werden, um die Anzahl der Würfe der um eins gröſsern Anzahl Würfel daraus herzuleiten. Für 3 Würfel z. B. iſt die Anzahl der Würfe =

$$6. (1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)$$

b) Nun ſei A die Reihe, welche anzeigt, wie vielmal jeder mit n Würfeln mögliche Wurf vorkommt: Man ſoll aus ihr die Reihe C für $(n+1)$ Würfel herleiten. *Z. B.* Für $n=2$ iſt (II)

$$A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$$

und die geſuchte Reihe für $n+1=3$

$$C = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1.$$

Die Reihe A hat $6n-(n-1)=5n+1$ Glieder, weil der niedrigſte Wurf mit n Würfeln $=n$, und der höchſte $=6n$ iſt. In ihr zeigt

das 1ſte Glied, wievielmal n Augen geworfen werden,
— 2te — — — $(n+1)$ — — —
— 3te — — — $(n+2)$ — — —
— 4te — — — $(n+3)$ — — —
. .
— *m*te — — — $(n+m-1)$ — — —
. .
— $(5n+1)$te — — $(n+5n)$ — — —

Verbindet man mit dem Wurfe $(n+m-1)$, der Qmal vorkomme, jede Seite des hinzukommenden Würfels, ſo kann dieſes mit jeder Seite Qmal geſchehen. Aber der Wurf wird dann aus $n+m-1$: $n+m$; $n+m+1$; $n+m+2$; $n+m+3$; $n+m+4$; $n+m+5$; je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen

Würfels mit dem Wurfe $n+m-1$ verbunden wird. Hiedurch ändert sich nun zwar die Anzahl der Augen, aber nicht die Anzahl der Fälle, und zugleich folgt hieraus: daſs man, um aus der Reihe *A* die Reihe *C* herzuleiten, jene sechsmal so untereinander schreiben müſſe, daſs man bei jeder Reihe eine Stelle weiter nach der rechten Hand zurükt. Die Reihe, welche aus der Summe jeder senkrechten Kolumne entſteht, wird die geſuchte Reihe *C* sein. *Z. B.* Wenn

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Augen
$A=$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	;

diejenige Reihe iſt, welche andeutet, wie vielmal jeder mit zwei Würfeln mögliche Wurf vorkommt, so iſt

$$5 \cdot (1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)$$

die Anzahl der Fälle, die zu *A* hinzukommen müſſen, um die Summe aller möglichen Fälle für 3 Würfel zu erhalten. Verbindet man nun mit dem Wurfe: 2 Augen, der einmal vorkommt, jede Seite des hinzugekommenen Würfels; so kann dieses mit jeder Seite nur einmal geschehen, daraus wird aber der Wurf:

1	1	1	1	1	1 mal
3,	4,	5,	6,	7,	8

(je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen Würfels oben liegt) davon jeder nur einmal vorkommt. Ferner, verbindet man mit dem Wurfe 3 Augen, der 2 mal vorkommt, jede Seite des hinzugekommenen Würfels, so kann dieses mit jeder Seite 2 mal geschehen, daraus wird aber der Wurf:

2	2	2	2	2	2 mal
4	5	6	7	8	9

je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen Würfels oben liegt, davon jeder Wurf zweimal vorkommt. Und so weiter. Daſs alſo die Summe jeder ſenkrechten Kolumne folgender Reihe:

1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

die gesuchte Reihe $C =$

1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

giebt. Die hier (Seite 15.) beigefügte Tabelle zeigt die verschiedenen Summen der Augen bei 1 bis 6 Würfeln; und wie oft unter allen möglichen Würfen, von einem Würfel bis auf 6, jede mögliche Anzahl Augen geworfen werden kann. Die Anzahl der letzten Würfe bei 4, 5 und 6 Würfeln ist zur Ersparung des Raums weggelassen worden, sie kann aber leicht ergänzt werden, weil die Reihen von der höchsten Anzahl der Würfe an, eben so abnehmen, wie sie von der kleinsten Anzahl bis zur höchsten gestiegen sind.

§. 2. *

1) Fragt man, wie oft mit 3 Würfeln eine Terne oder ein Pasch geworfen werden kann, das heisst nach der Anzahl der Fälle, dass 3, oder nur 2 gleiche Augen oben stehen; so ist offenbar, dass, um eine Terne zu werfen, es einen Fall für 3 Sechsen, oder für 3 Fünfen, Vieren, Dreien, Zweien oder 3 Einsen giebt, und demnach die Anzahl aller Fälle $=6$ ist; dass es aber 15 Fälle giebt, wo 2 Sechsen *), oder Fünfen, u. s. f. geworfen werden können, und also die gesuchte Anzahl der Päsche $=15.6$ oder 90 ist.

2) Bei 4 Würfeln ist die Anzahl der Würfe mit ungleichen Augen $= 6.5.4.3 = 360$; mit einem Pasch

*) Diese können nämlich mit dem (1sten und 2ten; 1, 3; 2, 3;) Würfel geworfen werden, und zu jedem dieser 3 Fälle können die Augen 1, 2, 3, 4, oder 5 des dritten Würfels fallen, welches also 3.5 oder 15 Fälle giebt.

TABELLE.

Bei Würfeln	sind die verschiedenen Summen der Augen																									
1	1	2	3	4	5	6																				
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12															
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18										
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24					
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31 etc.

Summen der Augen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	etc.	
m. Würfeln I.	1	1	1	1	1	1																		mal
II.		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1												
III.			1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1						
IV.				1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	etc.	
V.					1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	etc.	
VI.						1	6	21	56	126	252	456	756	1161	1666	2247	2856	3431	3906	4221	4332	4221	etc.	

und 2 ungleichen Augen = 6. 5. 4. 6 = 720; mit 2 ungleichen Päschen = 6. 5. 3 = 90; mit einer Terne = 4. 5. 6 = 120; mit einer Quaterne = 6; also in Summe 360 + 720 + 90 + 120 + 6 = 1296 Würfe = 6^4 wie es sein muss. (§. 1. I).

§. 3. *

Wenn von zwei oder mehrern Begebenheiten, die sich auf einerlei Handlung u. s. f. beziehen, gefragt wird, wie wahrscheinlich es sei, dass entweder die eine oder die andere, u. s. f. sich zutrage, so findet man die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit, wenn man die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Begebenheiten sucht.

Zum Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf entweder 8 oder 9 Augen zu werfen?

Man suche erstens die Wahrscheinlichkeit mit sechs Würfeln in einem Wurfe 8 Augen zu werfen; dann die Wahrscheinlichkeit mit eben so viel Würfeln in einem Wurfe 9 Augen zu werfen. Jene ist (Tabelle §. 1. III) $= \frac{21}{46656}$; diese (ebendaselbst) $= \frac{56}{46656}$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{21}{46656} + \frac{56}{46656} = \frac{77}{46656}$.

Denn aus angeführtem Orte ist die Anzahl der Fälle 8 Augen zu werfen = 21, und 9 Augen = 56, folglich die Anzahl der günstigen Fälle = 21 + 56, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{21+56}{6^6} = \frac{21}{6^6} + \frac{56}{6^6}$.

Eben so findet man die Wahrscheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf entweder 12, 15 oder 20 Augen zu werfen $= \frac{456+1666+4221}{6^6} = \frac{6343}{46656}$. Und so weiter.

§. 4.

Erklärung. Man nennet *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit* diejenige, welche das Produkt aus mehrern andern Wahrscheinlichkeiten ist. So ist die Wahrscheinlichkeit

lichkeit $\frac{nqsu}{mprt}$ aus den Wahrſcheinlichlichkeiten $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$ zuſammengeſetzt.

§. 5.

Lehrsatz. *Wenn zwei verſchiedene Handlungen, Bewegungen, u. ſ. f. gegeben ſind, und von der erſten eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit* $=\frac{n}{m}$, *von der zweiten eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit* $=\frac{q}{p}$ *iſt, abhänget; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs alle beide Begebenheiten ſich ereignen werden, aus den Wahrſcheinlichkeiten dieſer beiden Begebenheiten zuſammengeſetzt, oder* $=\frac{nq}{mp}$.

Beweis. I. Ein jeder von den m Fällen, worunter die erſte Begebenheit ſich befindet, kann mit einem jeden der p Fälle, worunter die zweite Begebenheit iſt, zuſammentreffen; alſo iſt die Anzahl der Fälle, wo zwei verſchiedene Begebenheiten zuſammentreffen können, $=mp$.

II. Ein jeder der n Fälle, welche für die erſte Begebenheit günſtig ſind, kann mit einem jeden der q Fälle, welche die zweite Begebenheit geben, zu gleicher Zeit geſchehen; alſo iſt die Anzahl der Fälle, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, $=nq$.

III. Folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs die zwei Begebenheiten ſich ereignen werden, $=\frac{nq}{mp}$ (Kap. I. §. 10.) *W. Z. E.*

§. 6.

Zusatz. I. *Wenn 3, 4, 5 oder eine noch gröſsere Anzahl verſchiedener Handlungen, Bewegungen, u. ſ. f. gegeben ſind, und von der*

$\left\{\begin{array}{l}\text{1ſten}\\ \text{2ten}\\ \text{3ten}\\ \text{4ten}\\ \ldots\end{array}\right\}$ eine Begebenheit abhängt, deren Wahrſcheinlichkeit $\left\{\begin{array}{c}\frac{n}{m}\\ \frac{q}{p}\\ \frac{s}{r}\\ \frac{u}{t}\\ \ldots\end{array}\right\}$ iſt; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs alle dieſe Begebenheiten zuſammentreffen, aus ihren einzelnen Wahrſcheinlichkeiten zuſammengeſetzt, das iſt, dem Produkte $\frac{n\,q\,s\,u\ldots\ldots}{m\,p\,r\,t\ldots\ldots}$ gleich ſein.

Denn die Wahrſcheinlichkeit, daſs die zwei erſten Begebenheiten zuſammentreffen, iſt, wie nur (§. 5.) erwieſen worden, $=\frac{nq}{mp}$; alſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs die drei erſten Begebenheiten zuſammentreffen, aus der Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, welche aus dem Zuſammentreffen der beiden erſten Begebenheiten entſteht, das iſt, aus $\frac{nq}{mp}$, und aus der Wahrſcheinlichkeit der dritten Begebenheit, das iſt, aus $\frac{s}{r}$ zuſammengeſetzt, und demnach $\frac{nqs}{mpr}$ ſein. Auf eben die Art wird bewieſen, daſs die Wahrſcheinlichkeit des Zuſammentreffens der drei erſten Begebenheiten mit der vierten, $\frac{nqs}{mpr}\cdot\frac{u}{t}$ oder $\frac{nqsu}{mprt}$ iſt; und ſo weiter.

§. 7.

Zusatz. II. Sind die Handlungen, Bewegungen, oder Zustände einander gleich, und die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten $\frac{n}{m}, \frac{p}{m}, \frac{q}{m}, \ldots$ an der Zahl x: so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs man auf das

$$\left\{\begin{array}{l}\text{erstemal}\\ \text{zweitemal}\\ \text{drittemal}\\ \ldots\ldots\end{array}\right\}$$

die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $= \left\{\begin{array}{c}\frac{n}{m}\\ \frac{p}{m}\\ \frac{q}{m}\\ \ldots\end{array}\right\}$ ist, hervorbringet, $= \frac{npq\ldots\ldots}{m^x}$.

Für $n = p = q = \ldots$, bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, daſs alle diese Begebenheiten zusammen geschehen $= \left(\frac{n}{m}\right)^x$.

§. 8.

Beispiele. Wenn Peter, Jakob und Johann, jeder zwei Würfel auf einen Tisch wirft; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs Peter einen Pasch, Jakob keinen Pasch, und Johann 7 Augen werfen wird, $= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ oder $\frac{5}{216}$.

Die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln viermal hintereinander einen Pasch zu werfen, ist $= \frac{1}{6^4}$ oder $\frac{1}{1296}$: und viermal hintereinander zwei Sechsen zu werfen, $= \frac{1}{36^4} = \frac{1}{1679616}$.

§. 9.*

Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf ſechs verſchiedene Augen zu werfen?

Hier iſt $\frac{n}{m} = \frac{6}{6} = 1$; $\frac{p}{m} = \frac{5}{6}$; $\frac{q}{m} = \frac{4}{6}$; $\frac{r}{m} = \frac{3}{6}$; $\frac{s}{m} = \frac{2}{6}$; $\frac{t}{m} = \frac{1}{6}$; $m = 6$; $x = 6$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1}{6.\,6.\,6.\,6.\,6.\,6} = \frac{5.\,4.\,3.\,2.\,1}{6^5} = \frac{5}{324}$.

Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in ſechs Würfen beim erſten Wurf ein Aſs, beim zweiten eine 2, beim dritten eine 3, beim vierten eine 4, beim fünften eine 5, und endlich beim ſechſten eine 6 zu werfen?

Hier iſt $\frac{n}{m} = \frac{1}{6}$, $x = 6$, alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}$.

§. 10.

Die Handlungen, Bewegungen oder Zuſtände, wovon die Begebenheiten, deren Wahrſcheinlichkeit geſucht wird, abhängen, werden die Urſachen oder die Anzeichen dieſer Begebenheiten genannt, je nachdem man vermuthen kann, daſs ſie ſolche entweder hervorbringen oder begleiten. Im erſten Falle heiſsen die Begebenheiten *Wirkungen*, im zweiten aber *bedeutete Sachen.* Sowohl in dem einen, als in dem andern Falle kann nur allein die Gewiſsheit der Ereignung der Urſache oder des Zeichens, der Wirkung oder der angezeigten Sache den Grad der Wahrſcheinlichkeit, der ihr zukommt, überlaſſen. Alſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter zwei Sechſen werfen wird, $= \frac{1}{36}$ nur in dem Falle ſein, wenn es gewiſs iſt, daſs er zwei Spielwürfel auf einen Tiſch werfen wird: und die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter den genannten Paſch 6 und 6 werfen wird, iſt $= \frac{1}{6}$ nur allein in dem

Falle, wenn es gewiſs iſt, daſs er einen Paſch werfen wird. Und umgekehrt kann die Gewiſsheit der Ereignung der Wirkung oder Bedeutung, der Urſache oder dem Zeichen den Grad der Wahrſcheinlichkeit, der ihnen zugehört, überlaſſen. Wenn aber die Urſache oder das Zeichen auf der einen Seite, und die Wirkung oder angezeigte Begebenheit auf der andern Seite, ungewiſs iſt, ſo iſt alsdann die Wahrſcheinlichkeit, daſs beides Urſache und Wirkung, oder Zeichen und angezeigte Begebenheit exiſtiren, aus den einzelnen Wahrſcheinlichkeiten der Urſache und Wirkung, oder des Zeichens und der angezeigten Sache, zuſammengeſetzt, das iſt, das Produkt aus dieſen einzelnen Wahrſcheinlichkeiten.

Wenn zum Beiſpiel die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter zwei Würfel auf eine Tafel werfen wird, $= \frac{n}{m}$ iſt: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs er einen Paſch werfen wird, $= \frac{n}{6m}$; und die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſer Paſch ein Paſch von zwei Sechſen ſein wird, $= \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ oder $\frac{n}{36m}$.

Kapitel III.

Von den figurirten Zahlen.

§. 1.

Weil die ſogenannten *figurirten* Zahlen in der Theorie ſowohl als in der Ausübung der Wahrſcheinlichkeitsrechnung ſehr häufig gebrauchet werden; ſo haben wir es für nützlich und bequem erachtet, eine kurze Abhandlung über dieſe Arten von Zahlen mitzutheilen, und ihr daher gegenwärtiges Kapitel gewidmet.

§. 2. *

Man findet *ſummatoriſche Reihen* auf die Art, daſs man das erſte und zweite Glied der gegebenen Reihe,

welche alsdann die *Grundreihe* genannt wird, addirt, zur Summe wieder das dritte Glied, und ſo weiter, zur Summe aller vorhergehenden Glieder jedesmal das nächſtfolgende ſetzt. Die ſummatoriſche Reihe kann man wieder als Grundreihe annehmen, auf die nur beſchriebene Art eine neue ſummatoriſche Reihe ſuchen, und dieſes Verfahren, ſo weit man will, fortſetzen.

§. 3.

Iſt nun jedes Glied der Grundreihe *Eins*, oder iſt die Grundreihe die Reihe der *Einheiten*; ſo bekömmt man zur ſummatoriſchen Reihe die Reihe der *natürlichen Zahlen*, ſo wie ſie von Eins anfangen, und der Ordnung nach auf einander folgen, wenn man unter jede Einheit der Grundreihe, die Summe dieſer Einheit und aller derjenigen Einheiten, die ihr linker Hand vorhergehen, ſetzt:

Grundreihe	1	1	1	1	1	1	u.ſ.f.	*die beſtändigen Zahlen*
		1	1	1	1	1		
			1	1	1	1		
				1	1	1		
					1	1		
						1		
ſummatoriſche Reihe	1	2	3	4	5	6	u.ſ.f.	*d. natürl. Zahlen*

Wenn man hievon die ſummatoriſche Reihe ſucht, und alſo unter jedes Glied die Summe deſſelben und aller natürlichen Zahlen, die ihm linker Hand vorhergehen, ſchreibt; ſo entſtehet eine dritte Reihe, deren Zahlen den Namen *Triangularzahlen* führen:

Grundreihe	1	2	3	4	5	6	u.ſ.f.	*die natürlichen Zahlen*
		1	2	3	4	5		
			1	2	3	4		
				1	2	3		
					1	2		
						1		
ſummatoriſche Reihe	1	3	6	10	15	21	u.ſ.f.	*die Triangularzahlen.*

Sucht man von dieſer abermals eine neue ſummatoriſche Reihe, indem man unter jede Triangularzahl die Summe dieſer Zahl und aller vorhergehenden Triangularzahlen ſetzt, ſo entſteht die Reihe der *Quadrangularzahlen:*

Grundreihe	1	3	6	10	15	21	u. ſ. f.	*die Triangularzahlen*
		1	3	6	10	15		
			1	3	6	10		
				1	3	6		
					1	3		
						1		
ſummatoriſche Reihe	1	4	10	20	35	56	u. ſ. f.	*die Quadrangularzahlen.*

Schreibt man unter jede Quadrangularzahl die Summe derſelben und aller dererjenigen, welche ihr linker Hand vorhergehen, ſo entſtehet eine fünfte Reihe von Zahlen, welche den Namen *Quinquangularzahlen* erhalten:

1 5 15 35 70 126 u. ſ. f. *die Quinquangularzahlen.*

Fährt man jetzt auf die gelehrte Art weiter fort, ſo daſs jede ſchon gefundene Reihe wieder die Grundreihe von einer neuen ſummatoriſchen Reihe wird; ſo findet man nach und nach die Reihe der *Sexangularzahlen*, *Septangularzahlen*, und ſo weiter, und allgemein die Reihe der mtangularzahlen, deren erſtes Glied $=1$, und zweites $=m$ iſt.

§. 4.*

Die auf dieſe Art entſtandenen Zahlen heiſsen überhaupt: *figurirte Zahlen*, und laſſen ſich nach der Ordnung in folgender Tafel vorſtellen, worinnen Kolumne I, II, III, u. ſ. f. die Reihe der Einheiten, der natürlichen Zahlen, der Triangularzahlen, u. ſ. f. iſt, und eine jede Kolumne auf die angegebene Berechnungsart leicht weiter fortgeſetzt werden kann. Uebrigens zähle man, ſo lange nichts anders erinnert wird, die Glieder dieſer ſummatoriſchen Reihen ſo, daſs man die Summe von n

Gliedern der Grundreihe für das *n*te Glied der summatorischen Reihe annimmt. Auf diese Art wird das erste Glied jeder summatorischen Reihe = 1 sein.

TAFEL
DER FIGURIRTEN ZAHLEN.

KOLUMNE	I	II	III	IV	V	VI
I	1	1	1	1	1	1
II	1	2	3	4	5	6
III	1	3	6	10	15	21
IV	1	4	10	20	35	56
V	1	5	15	35	70	126
VI	1	6	21	56	126	252
VII	1	7	28	84	210	462
VIII	1	8	36	120	330	792
IX	1	9	45	165	495	1287
X	1	10	55	220	715	2002
XI	1	11	66	286	1001	3003
XII	1	12	78	364	1365	4368

§. 5.*

Man kann auch andere arithmetische Progressionen, und überhaupt jede arithmetische Progression, die von Eins anfängt, zum Grunde legen: wir werden uns aber hier nur allein mit denjenigen figurirten Zahlen beschäftigen, welche aus der Progression der in natürlicher Ordnung fortschreitenden Zahlen entspringen, und in der (§. 4.) beigefügten Tabelle angegeben werden.

§. 6.*

Das *n*te oder allgemeine Glied der summatorischen Reihe, welches auch das *summatorische Glied der Grundreihe* genannt wird, ist eine Funktion, nicht nur derjeni-

gen Zahl (n), die anzeigt, wie viel Glieder der Grundreihe man bis dahin in die Summe gebracht hat, oder des *Index des letzten in die Summe gebrachten Gliedes der Grundreihe;* sondern auch der Zahl (m), des *Index der Reihe*, welche man bekömmt, wenn man die Reihen von der ersten Grundreihe an, und diese dazu zählt.

Dieses werden folgende Betrachtungen (§. 7—15) in ein helleres Licht setzen.

§. 7.

Das summatorische Glied jeder Reihe als Grundreihe angenommen (§. 6.) ist zugleich das allgemeine Glied der folgenden summatorischen Reihe. Nämlich:

Aus den (§. 3.) gegebenen Erklärungen folgt, dass eine figurirte Zahl, welche die nte Stelle vom Anfange in ihrer Reihe einnimmt, und zur mten Ordnung gehört, oder die nte mtangularzahl, der Summe der n ersten figurirten Zahlen der ($m-1$)ten Ordnung, oder der Summe der n ersten ($m-1$) tangularzahlen, gleich ist.

Zum Beispiel. Die zwanzigste Triangularzahl ist die Summe der zwanzig ersten natürlichen Zahlen; die siebente Zahl der fünften Ordnung oder die siebente Quinquangularzahl ist der Summe der sieben ersten Quadrangularzahlen gleich; u. s. f.

§. 8.

Eine figurirte Zahl, welche zur mten Ordnung gehört, und die nte Stelle vom Anfange an in ihrer Reihe einnimmt, ist der figurirten Zahl gleich, welche zur nten Ordnung gehört, und die mte Stelle vom Anfang in ihrer Reihe einnimmt, oder die nte mtangularzahl ist mit der mten ntangularzahl einerlei.

Zum Beispiel. Die siebente Triangularzahl ist der dritten Septangularzahl gleich; die dritte Quadrangularzahl ist der vierten Triangularzahl gleich; u. s. w. *)

*) Man kann sich hievon aus der beigefügten Tafel (§. 4.) überzeugen; es wird aber (§. 13. und 14.), wo wir die allgemeine Form der figurirten Zahl jeder Ordnung suchen werden, näher bewiesen werden. *Anmerk. d. Uebers.*

ZAHLEN DER KOLUMNEN.

ZAHLEN DER GLIEDER.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
I	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
II	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
III	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IV	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
V	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
VI	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
VII	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
VIII	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
IX	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
X	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
XI	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
XII	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

§. 9. *

Lehrsatz. *Wenn man die figurirten Zahlen wie in beistehender Tafel ordnet, so, dass dem ersten wirklichen Gliede 1 der zweiten Kolumne eine Null, der dritten Kolumne zwei Nullen, der vierten drei Nullen, und überhaupt dem ersten wirklichen Gliede der m ten Kolumne (m − 1) Nullen vorausgehen: so verhält sich die Summe von so viel Gliedern, als man will, der m ten Ordnung, vom ersten Gliede 0 an gerechnet, zu dem letzten, mit der Anzahl der angenommenen Glieder gevielfältigten Gliede, wie die Einheit (1) zu der Zahl, welche die Ordnung der Kolumne anzeigt (m).*

Zum Beispiel. Für Kolumne II, $0+1+2+3 : 4.3 = 1 : 2$; für Kolumne III, $0+0+1+3+6 : 5.6 = 1 : 3$; und so weiter.

Beweis. Denn es seien zwei unmittelbar auf einander folgende Reihen der Tafel *P* und *S*: und zwar

P	*S*
a	*o*
b	*g*
c	*h*
d	*k*
e	*l*
f	*p*
	q

stelle *P* die *m*te, also *S* die $(m+1)$te Reihe vor, und man setze, dass der Satz für die Kolumne *P* wahr sei, dass also in der Kolumne *P* die Summe von

$$\left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ n-4 \\ n-5 \end{matrix}\right\} \text{Gliedern, oder} \left\{\begin{matrix} a+b+c+d+e+f \\ a+b+c+d+e \\ a+b+c+d \\ a+b+c \\ a+b \\ a \end{matrix}\right\} \text{zu} \left\{\begin{matrix} n\,f \\ (n-1)\,e \\ (n-2)\,d \\ (n-3)\,c \\ (n-4)\,b \\ (n-5)\,a \end{matrix}\right\}$$

sich verhalte wie $1 : m$; so folget, dass

$$\left.\begin{cases} q=\dfrac{nf}{m}, & \text{weil } a+b+c+d+e+f=q \\ p=\dfrac{(n-1)e}{m}, & \text{weil } a+b+c+d+e\ =p \\ l=\dfrac{(n-2)\,d}{m}, & \text{weil } a+b+c+d\ =l \\ k=\dfrac{(n-3)\,c}{m}, & \text{weil } a+b+c\ =k \\ h=\dfrac{(n-4)\,b}{m}, & \text{weil } a+b\ =h \\ g=\dfrac{(n-5)\,a}{m}, & \text{weil } a\ =g \end{cases}\right\} \text{Demnach ist}$$

$$g+h+k+l+p+q=\frac{(n-5)a+(n-4)b+(n-3)c+(n-2)d+(n-1)e+nf}{m}$$

$$=\frac{n\,(a+b+c+d+e+f)-(5a+4\,b+3c+2d+e)}{m}$$

$$=\frac{n\,q-(g+h+k+l+p)}{m}.\quad \text{Folglich}$$

$$(m+1)\ (g+h+k+l+p)=n\,q-m\,q \text{ oder}$$

$$g+h+k+l+p=\frac{n-m}{m+1}q \text{ und}$$

$$g+h+k+l+p+q=\frac{(n+1)\,q}{m+1}.$$

Es verhält ſich alſo auch in der $(m+1)$ ten Reihe S,

$$(g+h+k+l+p+q):\ (n+1)\ q=1:(m+1).$$

Wenn nämlich in der Kolumne P, die Buchſtaben $a, b, c, d, e, f;$ n Glieder vorſtellen, ſo ſind o, g, h, k, l, p, q in der Kolumne S, $(n+1)$ Glieder. Da nun der Satz für die erſte Kolumne richtig iſt, wie man ſich leicht wird überzeugen können, da ſie aus lauter Einheiten beſtehet: ſo iſt er auch für die zweite, und alſo auch für die dritte,

vierte, fünfte, und überhaupt für die *m*te Kolumne richtig. *W. Z. E.*

§. 10.*

Zusatz. Aus der Gleichung (§. 9.)

$$g+h+k+l+p=\frac{(n-m)q}{m+1}$$

folget, wenn man darinnen r für $(m+1)$ ſchreibt:

$$(g+h+k+l+p):(n-r+1)\,q=1:r$$

das heiſst: die Summe von ſo viel Gliedern, als man will, irgend einer Kolumne r, vom erſten wirklichen Gliede 1 an gerechnet, verhält ſich zu dem unmittelbar auf das letzte Glied (p) folgenden, und mit der Anzahl der Glieder $(n-r+1)$ gevielfältigten Gliede (q), wie $1:r$. Denn in dem Faktor $n-m$ oder $n-(r-1)$ zeigt m oder $r-1$ die Anzahl der Nullen an, welche dem Gliede 1 der rten Kolumne vorhergehen, und folglich iſt $n-m$ d. i. $n-r+1$ die Anzahl der Glieder, weniger der Anzahl der Nullen.

Zum Beiſpiel. Für Kolumne II iſt $1+2+3+4:4.5=1:2$; für Kolumne III, $1+3+6+10:4.15=1:3$; und ſo weiter.

§. 11.

Die *n*te Zahl (nach §. 4) der $\left\{\begin{array}{l}\text{erſten}\\ \text{zweiten}\\ \text{dritten}\\ \text{vierten}\\ \text{u. ſ. f.}\end{array}\right\}$ Ordnung

verhält ſich zu der eben ſo vielten Zahl der $\left\{\begin{array}{l}\text{zweiten}\\ \text{dritten}\\ \text{vierten}\\ \text{fünften}\\ \text{u. ſ. f.}\end{array}\right\}$

Ordnung, wie $\left\{\begin{array}{c}1\\ 2\\ 3\\ 4\\ \text{u. ſ. f.}\end{array}\right\}$ zu $\left\{\begin{array}{l}n\\ n+1\\ n+2\\ n+3\\ \text{u. ſ. f.}\end{array}\right\}$

Und überhaupt: die nte Zahl der mten Ordnung verhält ſich zu der nten Zahl der $(m+1)$ten Ordnung, wie $m : (n+m-1)$.

§. 12.*

So verhält ſich die dritte Zahl der zweiten Ordnung (d. i. 3) zu der dritten Zahl der dritten Ordnung (d. i. 6) $= 2 : (3+2-1) = 1 : 2$; desgleichen die ſechſte Zahl der dritten Ordnung (oder 21) zu der ſechſten Zahl der vierten Ordnung (oder zu 56) $= 3 : (6+3-1) = 3 : 8$; u. ſ. w.

Denn es ſeien a, b, c, d, e, f; n Zahlen der mten Ordnung vom erſten Gliede (1) an gerechnet: ſo iſt $(a+b+c+d+e) : (n-1)f = 1 : m$ (§. 10.) folglich $a+b+c+d+e = \frac{(n-1)f}{m}$. Demnach verhält ſich die nte Zahl der mten Ordnung zu der nten Zahl der $(m+1)$ten Ordnung, oder

$$f : (a+b+c+d+e+f) = 1 : \left(1+\frac{n-1}{m}\right).$$
$$= m : (m+n-1).\quad \textit{W. Z. E.}$$

§. 13.

Aufgabe. *Den allgemeinen Ausdruk einer figurirten Zahl in m und n, wenn die Zahl der Ordnung $= m$, und des Gliedes $= n$ iſt, oder: eine Formel für die nte mtangularzahl zu finden.*

Auflösung. Es ſei $\left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ .. \end{array}\right\}$ die nte $\left\{\begin{array}{l} \text{natürliche} \\ \text{triangular-} \\ \text{quadrangular-} \\ \text{quinquangular-} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$ Zahl: ſo verhält ſich (§. 11)

$a : b = 2 : (n+1)$; es iſt aber $a = n$, folglich $b = \frac{n(n+1)}{1.\ 2}$;

$b : c = 3 : (n+2)$; folglich $c = b.\ \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$;

$c:d=4:(n+3)$; folglich $d=c.\frac{n+3}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$;

und so weiter.

§. 14.*

Wenn also überhaupt die nte $(m-1)$ tangularzahl ist $q=\frac{n(n+1)\ldots\ldots(m+n-3)}{1.\ 2\ldots\ldots(m-2)}$, so ist die nte mtangularzahl $r=q.\frac{m+n-2}{m-1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(m+n-3)(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots(m-2)(m-1)}$, weil $q:r=(m-1):(n+m-2)$. Da nun $1.\ 2.\ 3\ldots n(n+1)\ldots(m+n-2)=1.\ 2.\ 3\ldots(m-1)\,m\ldots(m+n-2)$ so hat man auch

$$\frac{n(n+1)\ldots(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3\ldots(m-1)}=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-3)(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots\ldots(n-2)(n-1)}$$

d. i. die nte mtangularzahl = der mten ntangularzahl, und also den Satz (§. 8.) bestätigt.

§. 15.*

Es ist demnach

die nte beständige Zahl $=1$

die nte natürliche Zahl $=n$

die nte Triangularzahl $=\frac{n(n+1)}{1.\ 2}$

die nte Quadrangularzahl $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$

die nte Zahl der fünften Ordn. $=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

die nte Zahl d. sechsten Ordn. $=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

und so ferner. Ueberhaupt ist die nte Zahl der mten Ordnung $=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(m-1)}$ oder $\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(n-1)}$.

§. 16.*

Aufgabe. *Die Summe einer endlichen Reihe figurirter Zahlen von gleicher Ordnung zu finden.*

Auflösung. Aus dem vorhergehenden ist klar, dass die Summe von n Zahlen einer gewissen Ordnung m, nichts anders ist, als die n te Zahl von der nächstfolgenden oder $(m+1)$ ten Ordnung (§. 7.). Folglich ist die Summe

der n ersten beständigen Zahlen $= n$

der n ersten natürlichen Zahlen $= \frac{n(n+1)}{1.\ 2}$

der n ersten Triangularzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$

der n ersten Quadrangularzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

der n ersten Zahlen d. 5ten Ordn. $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

§. 17.

Und überhaupt ist die Summe der n ersten Zahlen von der mten Ordnung, oder der n ersten mtangularzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(m-1)\,m}$ oder $=$

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots(n-1)}.$$

Zum Beispiel. Die Summe der vier ersten Triangularzahlen $1+3+6+10$ ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{4.\ 5.\ 6}{1.\ 2.\ 3}$ oder 20; die Summe der 25 ersten Zahlen von der 8ten Ordnung $1 + 8 + 36 + 120 +$ u. s. f. ist

$$\frac{25.\ 26.\ 27.\ 28.\ 29.\ 30.\ 31.\ 32}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}$$ oder 10 518 300;

die Summe der 13 ersten Zahlen von der 12ten Ordnung ist

13. 14.

$$\frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 11 \cdot 12} \text{ oder } 2\,704\,156.$$

§. 18.

Wenn man die Einheit (1) nach und nach durch

$$\left\{\begin{array}{ll} 1-x & \text{oder } (1-x)^1 \\ 1-2x+x^2 & \text{oder } (1-x)^2 \\ 1-3x+3x^2-x^3 & \text{oder } (1-x)^3 \\ & (1-x^4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & (1-x)^m \end{array}\right\}$$

dividirt; so ist der Quotient die unendliche Reihe

$$\left\{\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+ \text{ u. s. f.} \\ 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+ \text{ u. s. f.} \\ 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+ \text{ u. s. f.} \\ 1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+ \text{ u. s. f.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+mx+\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3+ \text{ u. s. f.} \end{array}\right\}$$

Hieraus erhellet, dafs überhaupt die unendliche Reihe $1+mx+\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3+$ u. s. f. in infinit. $= \frac{1}{(1-x)^m}$;

Oder: vielfältigt man alle Zahlen bis ins unendliche von der mten Ordnung mit einer Gröfse x, die kleiner als die Einheit ist, nämlich eine jede Zahl mit derjenigen Potenz von x, deren Grad mit dem Index (nach §. 4.) dieser Zahl, weniger 1 übereinkommt; so ist die Summe solcher unendlichen Glieder der Quotient, den man erhält, wenn man die Einheit durch die mte Potenz von $(1-x)$ dividirt.

§. 19.*

Die allgemeine Formel für die Summe der n ersten figurirten Zahlen von der mten Ordnung, wenn jede Zahl

auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben wird, iſt eine Funktion von m, n, und p.

§. 20.

Aufgabe. *Eine Formel für die Summe der n erſten m tangularzahlen in m, n und p zu finden, wenn jede auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben worden iſt.*

Auflösung. *I. Die Summe der Potenzen der von 1 bis n in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen zu finden.*

Der Kürze wegen bedeute

$$\int n,\ \int n^2,\ \int n^3,\ \int n^4,\ \ldots\ \int n^{p+1}$$

die Summe der n erſten natürlichen Zahlen, jede auf die Potenz vom Grade

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ (p+1)$$

erhoben; und folglich

$$\left\{\begin{array}{lll}
\int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^1, & \int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^2, & \int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^3 \text{ etc.} \\
\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^1, & \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2, & \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^3, \text{ etc.} \\
\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right)^1, & \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right)^2, \text{ etc.} & \\
\text{u. ſ. f.} & &
\end{array}\right\}$$

die Summe der n erſten $\left\{\begin{array}{l}\text{Triangular-}\\ \text{Quadrangular-}\\ \text{Quinquangular-}\\ \text{u. ſ. f.}\end{array}\right\}$ zahlen, jede

auf die Potenz vom

1ſten, 2ten, 3ten, u. ſ. f. Grade

erhoben. Man erhält demnach:

$$1)\ \int n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\ (\S.\ 13 = 17).$$

Nun iſt $\int \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ oder $\int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{2}$ oder $\int \frac{n^2}{2} + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,2}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (ebendaselbst); folglich

2) $\int n^2 = -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Nun ist $\int \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder $\int \frac{n^3}{6} + \int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{3}$

oder $\int \frac{n^3}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; folglich

3) $\int n^3 = \frac{n(n+1)}{2} - 3 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Auf ähnliche Art findet man

4) $\int n^4 = -\frac{n(n+1)}{2} + 7 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$-6 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$;

und so weiter. Setzt man der Kürze wegen

$a = \frac{n(n+1)}{2}$,

$b = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

$c = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

$d = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$,

und so ferner: so erhält man

$\int n = +a$

$\int n^2 = -a + b$

$\int n^3 = +a - 3b + c$

$$\int n^4 = -a + 7b - 6c + d$$
$$\int n^5 = +a - 15b + 25c - 10d + e$$
$$\int n^6 = -a + 31b - 90c + 65d - 15e + f$$

und ſo weiter. Alſo überhaupt

$$\int n^{p+1} = \pm \left\{ a - \frac{2^p - 1}{1} . b + \frac{3^p - 2 . 2^p + 1}{1 . 2} . c - \frac{4^p - 3 . 3^p + 3 . 2^p - 1}{1 . 2 . 3} . d + \frac{5^p - 4 . 4^p + 6 . 3^p - 4 . 2^p + 1}{1 . 2 . 3 . 4} . e - \text{etc.} \right\}$$

Das Geſetz, welches dieſe Reihe beobachtet, iſt in die Augen fallend, ſie muſs das Zeichen + oder − erhalten, je nachdem der Exponent p eine gerade oder ungerade Zahl iſt, und es verſchwinden in ihr alle Glieder, die auf das $(p+1)$ te folgen.

§. 21. *

Es iſt alſo eine Formel für $\int n^{p+1}$ gefunden worden, welche die *Summe der Potenzen der von 1 bis n in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen* angiebt, wenn man darinnen anſtatt n und p die gehörigen Werthe ſchreibt. Man findet nämlich aus derſelben die Summe

$\int n^1$, $\int n^2$, $\int n^3$, $\int n^4$, $\int n^5$, $\int n^6$, ...

für $p =$

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

die entwikelte Reihe bekömmt das Zeichen

+, −, +, −, +, −, ...

und es verſchwinden in ihr das

2te etc. 3te etc. 4te etc. 5te etc. 6te etc. 7te etc. . . .

alle folgende Glieder.

Zum Beiſpiel. Die Summe von 1000 Gliedern der 10ten Potenzreihe zu finden.

Hier iſt $p + 1 = 10$, $n = 1000$, folglich

$$\int 1000^{10} = -\left(a - \frac{2^9-1}{1}.\,b + \frac{3^9-2.2^9+1}{1\,.\,2}.\,c - \ldots - k\right)$$

$$= -a + 511\,.\,b - 9330\,.\,c + 34105\,.\,d - 42525\,.\,e + 22827\,.\,f - 5880\,.\,g + 750\,.\,h - 45\,.\,i + k$$

Nun ist

$$a = \frac{1000\,.\,1001}{2} = 500\;500$$

$$b = \frac{1000\,.\,1001\,.\,1002}{3} = 334\;334\;000$$

$$c = \frac{1000\,.\,1001\,.\,1002\,.\,1003}{4} = 251\;502\;751\;500$$

$$d = \frac{1000\ldots\ldots1004}{5} = 202\;007\;010\;004\;800$$

$$e = \frac{1000\ldots\ldots1005}{6} = 169\;180\;870\;879\;020\;000$$

$f = 145\;882\;248\;089\;394\;960\;000$

$g = 128\;540\;495\;847\;768\;134\;130\;000$

$h = 115\;172\;284\;279\;600\;248\;180\;480\;000$

$i = 104\;587\;951\;354\;304\;985\;372\;693\;888\;000$

$k = 96\;030\;755\;334\;407\;304\;751\;291\;660\;800\;000$

Vielfältigt man diese gefundenen Werthe für a, b, c, ... k mit den dazu gehörigen Koëfficienten -1, $+511$, -9330, ... und addirt die gefundenen Produkte, so ist die Summe der positiven Glieder

96 117 137 877 677 971 523 292 831 098 000

und der negativen

4 707 213 636 253 728 099 050 906 855 500

Zieht man nun diese von jener ab, so bleibt der gesuchte Werth für $\int 1000^{10}$ übrig:

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

§. 22.

II. Die Summe der Potenzen der n ersten Triangularzahlen zu finden.

Es ist $\int \frac{n(n+1)}{1 . 2} = \frac{b}{2}$;

$$\int \left(\frac{n(n+1)}{1 . 2}\right)^2 = \frac{2b-4c+d}{4};$$

$$\int \left(\frac{n(n+1)}{1 . 2}\right)^3 = \frac{4b-32c+38d-12e+f}{8};$$

u. s. f. Und überhaupt die Reihe für

$$\int \left(\frac{n(n+1)}{1 . 2}\right)^{p+1} = \frac{1}{1.2} . \left\{ b - \frac{3^p-1}{1} c + \frac{6^p-2 . 3^p+1}{1 . 2} . d - \frac{10^p-3 . 6^p+3 . 3^p-1}{1 . 2 . 3} . e + \frac{15^p-4 . 10^p+6 . 6^p-4 . 3^p+1}{1 . 2 . 3 . 4} . f - \text{etc.} \right\}$$

worinnen alle Glieder, die auf das $(2p+1)$te Glied folgen, verschwinden.

III. Die Summe der Potenzen der n ersten Quadrangularzahlen zu finden.

Es ist

$$\int \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3} = +\frac{c}{6};$$

$$\int \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}\right)^2 = -\frac{6c-18d+9e-f}{36};$$

u. s. w. Und überhaupt

$$\int \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}\right)^{p+1} = \pm \frac{1}{1.2.3} . \left\{ c - \frac{4^p-1}{1} . d + \frac{10^p-2 . 4^p+1}{1 . 2} . e - \frac{20^p-3 . 10^p+3 . 4^p-1}{1 . 2 . 3} . f + \text{etc.} \right\}$$

$+$ oder $-$, je nachdem p gerade oder ungerade ist, auch verschwinden alle auf das $(3p+1)$te Glied folgende Glieder.

§. 23. *

IV. Die Summe der Potenzen der n ersten mtangularzahlen zu finden.

a) In der Formel für die Summe der Potenzen der *n* ersten *natürlichen* Zahlen (§.20. I) enthalten die Zähler der Koëfficienten von *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ... als Glieder, deren Anzahl bei jedem folgenden Zähler um eins grösser wird, die *natürlichen Zahlen*, jede auf die Potenz *p* erhoben, und diese Potenzen haben zu Faktoren nach und nach die *Binomialkoëfficienten*. Nämlich der Zähler des Koëfficienten von *b* besteht aus den Gliedern 1 | und 2^p

die zu Faktoren haben	1^p	1

der Zähler des Koëfficienten von *c* besteht aus

den Gliedern	3^p	2^p	1^p
die zu Faktoren haben	1	2	1

der Zähler des Koëfficienten von *d* besteht aus

den Gliedern	4^p	3^p	2^p	1^p
die zu Faktoren haben	1	3	3	1

der Zähler des Koëfficienten von *e* besteht aus

den Gliedern	5^p	4^p	3^p	2^p	1^p	; u. f. w.
die zu Faktoren haben	1	4	6	4	1	

Das erste Glied jedes Zählers hat allemal +, das zweite −, und eben so wechseln die Zeichen bei den folgenden ab. Endlich ist der Nenner des Koëfficienten von *b*, = 1; von *c* das Produkt 1.2; von *d* das Produkt 1.2.3; von *e* das Produkt 1.2.3.4; u. f. f.

b) In der Formel für die Summe der Potenzen der *n* ersten *Triangularzahlen* (§.22. II) enthalten die Glieder der Zähler der Koëfficienten von *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, u. f. f. auf ähnliche Art wie vorhin, die *Triangularzahlen*, jede auf die *p*te Potenz erhoben, und haben auch auf die Art wie vorher, zu Faktoren die *Binomialkoëfficienten*. Die Zeichen der Glieder jedes Zählers wechseln wie vorhin mit + und − ab, und der Nenner des Koëfficienten

von *c* ist 1	von *e*, 1.2.3	u. f. f.
— *d* — 1.2	— *f*, 1.2.3.4	

c) In der Formel für die Summe der Potenzen der n ersten *Quadrangularzahlen* (§ 22.III) enthalten die Glieder der Zähler der Koëfficienten von d, e, f, g, h, ... nach und nach die *Quadrangularzahlen*, jede auf die Potenz vom Grade p erhoben, und diese haben zu Faktoren nach und nach die *Binomialkoëfficienten*. Die Zeichen wechseln ab, und der Nenner des Koëfficienten

von d ist 1
— e — 1 . 2
— f — 1 . 2 . 3
— g — 1 . 2 . 3 . 4
u. s. f.

d) Allemal hat das erste Glied jeder Reihe +, das zweite −, und so fort haben die folgenden Glieder abwechselnd + und −, wenn man nicht auf das Zeichen der Reihe Rüksicht nimmt, welches bei den Reihen für die Summe der Potenzen der n ersten *natürlichen* und *Quadrangularzahlen* für jeden besondern Fall durch die Zahl p bestimmt wird, da hingegen die Reihe für die Summe der n ersten *Triangularzahlen* allemal + hat, was auch p für eine Zahl sein mag. Auch hat die Reihe

$\int n^{p+1}$ zum Faktor $\frac{1}{1}$ und zum ersten Gliede a

$$\int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^{p+1} — \frac{1}{1.2} \text{ ———————— } b$$

$$\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^{p+1} — \frac{1}{1.2.3} \text{ ———————— } c$$

u. s. f.

e) Hieraus ($a:d$) läßt sich überhaupt auf folgendes allgemeine Gesetz schliessen: In der Formel für die Summe der n ersten mtangularzahlen, jede auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben, oder in

$$\int\left(\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+m-2)}{1.\;\;2.\;\;\;3.\,.\,.\,.\,.\;\;(m-1)}\right)^{p+1}$$

enthalten die Glieder der Zähler der Koëfficienten von

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+m)}{m+1} \text{ der } \beta \text{ heiſse}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+m+1)}{m+2} = \gamma$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+m+2)}{m+3} = \delta$$

u. ſ. f.

nach und nach die *m tangularzahlen*, jede auf die Potenz vom Grade p erhoben, und dieſe haben zu Faktoren die *Binomialkoëfficienten*; die Nenner dieſer Koëfficienten von β, γ, δ, u. ſ. f. ſind nach einander 1, 1.2, 1.2.3, u. ſ. f. und die Glieder im Zähler haben vom erſten Gliede an abwechſelnd +, − zum Zeichen. Nämlich der Koëfficient

von β iſt $\frac{m^p - 1}{1}$;

von γ, $\frac{\left\{\frac{m(m+1)}{1.2}\right\}^p - 2.m^p + 1}{1.2}$;

von δ, $\frac{\left\{\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\right\}^p - 3.\left\{\frac{m(m+1)}{1.2}\right\}^p + 3m^p - 1}{1.2.3}$;

u. ſ. f.

Die ganze Reihe iſt in den Bruch $\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}$ gevielfältigt, und hat zum erſten Gliede

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}{m} \text{ welches } \alpha \text{ heiſsen mag.}$$

Das Zeichen des zweiten Gliedes iſt −, und eben ſo wechſeln bei den folgenden Gliedern + und − ab. Endlich wird das Zeichen der ganzen Reihe durch p beſtimmt;

ſie hat nämlich, wenn m eine gerade Zahl bedeutet, ein bejahtes oder ein verneintes Zeichen, je nachdem p gerade oder ungerade iſt; wenn aber m eine ungerade Zahl bedeutet, allemal ein bejahtes Zeichen, es mag p eine gerade oder ungerade Zahl ſein.

§. 24.

Demnach iſt die *Summe der n erſten mtangularzahlen, jede auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben*, folgende:

$$\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(m-1)}\right)^{p+1} =$$

$$\pm\frac{1}{1\,.\,2\dots(m-1)}\cdot\left\{\alpha - \frac{m^p-1}{1}\cdot\beta\right.$$

$$\mp\frac{\left(\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\right)^p - 2\,.\,m^p+1}{1\,.\,2}\cdot\gamma$$

$$\pm\frac{\left(\frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^p - 3\left(\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\right)^p + 3\,.\,m^p - 1}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\delta$$

$$\mp\frac{\left(\frac{m\dots(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right)^p - 4\cdot\left(\frac{m\dots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^p + 6\cdot\left(\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\right)^p - 4\,.\,m^p + 1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\varepsilon$$

$\pm$ u. ſ. f. } Alle Glieder dieſer Reihe, welche auf das $(mp-p+1)$te Glied folgen, verſchwinden.

Es iſt alſo eine allgemeine Formel in m, n, p für die Summe der n erſten mtangularzahlen, jede auf die Potenz vom Grade $p+1$ erhoben, gefunden worden.

§. 25.*

Zum Beiſpiel. Die Summe der Quadrate der zwanzig erſten Triangularzahlen zu finden.

Hier iſt $m=3$, $n=20$, $p+1=2$, folglich $mp-p+1=3$,

und die Reihe

$$\int\left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2 = +\frac{1}{1.2}\cdot\left\{b-\frac{3-1}{1}.c+\frac{\frac{3.4}{1.2}-2.3+1}{1\ .\ 2}.d\right\} =$$

$\frac{2b-4c+d}{4}$, welche, $n=20$ gesetzt, die verlangte Summe giebt $1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+\ldots.+210^2=$

$$\frac{2\ .\ 3080-4\ .\ 53130+1020096}{4} = 203434.$$

§. 26.*

Zusatz. Setzt man in der allgemeinen Formel (§. 24.) $n+r$ anstatt n, so bekömmt man die Summe der Potenzen der $(n+r)$ ersten *m*tangularzahlen, oder

$$\int\left(\frac{(n+r)\ (n+r+1)\ \ldots.\ (n+r+m-2)}{1\ .\ 2\ \ldots.\ (m-1)}\right)^{p+1}$$

und wenn man hievon $\int\left(\frac{n(n+1)\ (n+2)\ldots.(n+m-2)}{1\ .\ 2\ \ldots.\ (m-1)}\right)^{p+1}$ subtrahirt, so erhält man zur Differenz

$$\int\left(\frac{(n+r)\ldots.(n+r+m-2)}{1.2\ldots.\ (m-1)}\right)^{p+1} - \int\left(\frac{n(n+1)\ldots.\ (n+m-2)}{1.2\ldots.\ (m-1)}\right)^{p+1}$$

das ist die Summe der Potenzen von $n+r-n$ oder r *m*tangularzahlen, von der $(n+1)$ ten *m*tangularzahl an gerechnet.

Kapitel IV.*

Die Erwartung.

§. 1.

1) Gesetzt, es verberge jemand in der einen Hand a Dukaten, und in der andern b; zwei Personen sollen jede, die eine was in der einen, und die andere was in der an-

dern Hand ist, herausnehmen; so ist die ganze Summe $= (a+b)$ Dukaten. Da aber beide ein gleiches Recht haben, entweder a oder b zu bekommen; so muss ein jeder von ihnen, wenn sie sich vor dem Spiele darein theilen wollen, die Hälfte der ganzen Summe erhalten. Folglich ist eines jeden Spielers *Werth seiner Erwartung* oder *jetzige Werth des Preises* $= \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}.(a+b)$ Dukaten.

2) Ist $b=0$; so ist der Werth eines jeden seiner Erwartung, oder der jetzige Werth des Preises $= \frac{1}{2}\ a.$

3) Sind in einem Becher 3 Kugeln: a, b, c; sollen 3 Personen, jede eine blindlings herausnehmen, und soll diejenige die a zieht, die Summe α; diejenige die b zieht, β; und die c zieht, γ bekommen; so ist eines jeden Werth seiner Erwartung $= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{1}{3}.(\alpha+\beta+\gamma).$ Und so weiter.

4) Ist $\gamma=0$, so ist eines jeden Werth seiner Erwartung $= \frac{1}{3}(\alpha+\beta)$; ist auch $\beta=0$, so ist ebenderselbe $= \frac{1}{3}\ \alpha.$

5) Sind also in einem Becher m Kugeln, 1 weisse und $(m-1)$ schwarze, sollen m Personen, jede eine blindlings herausnehmen, und soll diejenige welche die weisse Kugel zieht, die Summe S bekommen; so ist der jetzige Werth des Preises $= \frac{S}{m} = \frac{1}{m}.\ S.$

6) Ist die Anzahl der günstigen Fälle $= n$ anstatt 1, also der widrigen $= m-n$; so ist die ganze Summe $= n.S$; demnach eines jeden Spielers Werth seiner Erwartung $= \frac{n.S}{m} = \frac{n}{m}.\ S.$

7) *Zum Beispiel.* Es seien 3 $(=n)$ weisse, und 6 $(=m-n)$ schwarze Kugeln, der Preis sechs

Dukaten (=S); so ist der Werth meiner Erwartung $= \frac{3}{6+3} . 6 = \frac{1}{3} . 6 = 2$ Dukaten.

§. 2.

1) Ist die Anzahl der Fälle, in denen man die Summe a bekommen kann, $=p$, die in denen man b bekommen kann, $=q$; so ist der Werth der Erwartung $= \frac{1}{p+q} . (ap+bq)$. Denn gesetzt, es seien eben so viel Spieler als überhaupt Fälle vorhanden sind, nämlich $p+q$, und eben so viel verschlossene Kästchen, in p von diesen, liege in jedem, die Summe a, und in q von ihnen, befinde sich in jedem, die Summe b; so ist die ganze Summe $= ap+bq$. Da aber der eine eben so viel Recht als der andere hat, entweder die Summe a, oder die Summe b, zu bekommen; so muss man die ganze Summe durch die Anzahl der Spieler, oder aller Fälle dividiren. Demnach ist der Werth der Erwartung eines jeden $= \frac{ap+bq}{p+q} = \frac{1}{p+q} . (ap+bq)$.

2) Ist $p=q$; so bekömmt man den Werth eines jeden seiner Erwartung $= \frac{1}{2} . (a+b)$.

3) Ist $p=2q$; so ist sein jetziger Werth $= \frac{2aq+bq}{3q} = \frac{1}{3} (2a+b)$.

4) Ist $p=3q$; so ist er $= \frac{1}{4} (3a+b)$.

5) Ist $b=0$, so ist ebenderselbe $= \frac{1}{p+q} . ap$.

6) Giebt es mp Fälle, in denen man die Summe a, und mq Fälle, in denen man b bekommen kann; so ist der Werth der Erwartung eines jeden $= \frac{mpa+mqb}{mp+mq}$.

$$=\frac{pa+qb}{p+q}=\frac{1}{p+q}.(pa+qb).$$

7) Giebt es p Fälle, in denen man a; q Fälle, in denen man b; und r Fälle, in denen man c erhalten kann, u. s. w.; so ist der Werth eines jeden seiner Erwartung $=\frac{ap+bq+cr+\text{etc.}}{p+q+r+\text{etc.}}=\frac{1}{p+q+r+\text{etc.}}.(ap+bq+cr+\text{etc.})$

8) Ist z. B. $b=0$; so ist eben dieser Werth

$$=\frac{1}{p+q+r+\text{etc.}}.(ap+cr+\text{etc.})$$

§. 3.

AUFGABE. *In der zwanzigsten Leipziger Lotterie waren überhaupt 16000 Loose; davon wurden in jeder der ersten vier Ziehungen 800 Nummern gegen 800 Gewinnste gezogen, so dass die herausgekommenen Nummern in den folgenden Klassen nicht weiter mitspielten; in der fünften und letzten Klasse wurden endlich die übrigen 12800 Nummern gegen 5234 Gewinnste und Prämien herausgezogen. In der ersten Klasse wurden auf 800 Gewinnste ausgezahlt 7610 Thaler; in der zweiten Klasse auf eben so viel Gewinnste 11200 Thlr.; in der dritten Klasse auf eben so viel Gewinnste 16220 Thlr.; in der vierten Klasse auf eben so viel Gewinnste 21220 Thlr.; endlich in der fünften oder letzten Klasse auf 5234 Gewinnste und Prämien 145350 Thlr. wie der beigefügte Lotterie-Plan angiebt. Man sucht die Einlage jeder Klasse, und den Werth eines Looses.*

AUFLÖSUNG. I. In der ersten Klasse ist die Einlage

(§. 2. No. 7 u. 8) $=\frac{1}{16000}.7610$ Th. $=$ 11 Gr. $4\frac{4}{50}$ Pf.

In d. 2ten Kl. $=\frac{1}{16000-800}.11200$ „ $=$ 17 „ $8\frac{4}{19}$ „

— 3. — $=\frac{1}{16000-2.800}.16220$ „ $=$ 1 Th. 3 „ $\frac{2}{5}$ „

$$\text{In d. 4ten Kl.} = \frac{1}{16000-3.800}.21220\,\text{Th.} = 1\,\text{Th.}\,13\,\text{Gr.}\,5\tfrac{31}{85}\,\text{Pf.}$$

$$\text{— 5. —} = \frac{1}{16000-4.800}.145350 \,{:} = 11 \,{:}\, 8 \,{:}\, 6\tfrac{3}{8} \,{:}$$

II. Alſo iſt der rechtmäſsige Preis eines Looſes, die Summe dieſer einzelnen Einlagen, nämlich 15 Thaler 6 Gr. $1\frac{21333}{64600}$ Pf.

B I L A N Z.

Einnahme.

III) 1ſte Kl.	16000 Looſe à	11 Gr. $4\frac{49}{50}$ Pf	betragen	7610 Th.
2.	15200	17 Gr. $8\frac{4}{19}$ Pf		11200 Th.
3.	14400	1 Th. 3 Gr. $\frac{2}{5}$ Pf		16220 Th.
4.	13600	1 Th. 13 Gr. $5\frac{31}{85}$ Pf		21220 Th.
5.	12800	11 Gr. 8 Th. $6\frac{3}{8}$ Pf		145350 Th.
		15 Th. 6 Gr. $1\frac{21333}{64600}$ Pf.		201600 Th.

Ausgabe.

1ſte Klaſſe	800	Gewinnſte	betragen	7610 Th.
2te —	800	—	—	11200 Th.
3te —	800	—	—	16220 Th.
4te —	800	—	—	21220 Th.
5te —	5234	Gewinnſte u. Prämien	—	145350 Th.
	8434	Gewinnſte u. Prämien	—	201600 Th.

IV. Der wirkliche Preis eines Looſes bei der Leipziger Lotterie iſt aber 14 Thaler 12 Groſchen; alſo geringer als der rechtmäſsige (II). Dieſes läſst ſich folgendergeſtalt begreiflich machen. Je theurer die erſten Klaſſen ſind, deſto wohlfeiler wird das ganze Loos. In den erſtern Klaſſen wird alsdann mehr bezahlt, als vermöge der Rechtmäſsigkeit des Spiels bezahlt werden ſollte; welches erlaubt ſein kann, ſo lange als dieſes gegen die Gerechtigkeit nicht zu weit getrieben iſt, und darinnen zu viel in Vergleichung des Gewinnſtes zu bezahlen vorgeſchrieben worden. Es beträgt aber in der Leipziger

Lotterie die Einlage der erſten Klaſſe 1 Thaler anſtatt 11 Groſchen 4 $\frac{40}{50}$ Pfennig, und der niedrigſte Gewinnſt in dieſer Klaſſe iſt 4 Thlr.; alſo *kann* darinnen ein Loos mit 1 Thlr. bezahlt werden, da es wenigſtens 3 Thlr. lucriret, und wenn es verſpielet, der Inhaber deſſelben nicht nur die Hofnung hat, in einer der folgenden Klaſſen mehr zu gewinnen, ſondern auch überhaupt weniger für die ganze Lotterie bezahlt, wenn er erſt in der letzten Klaſſe herauskommt. Theilte man hingegen die Einlagen zu den einzelnen Klaſſen nicht ohngefähr auf ſolche Art ein, wie in der Leipziger Lotterie wirklich geſchehen iſt, ſondern wie es die Rechmäſsigkeit des Spiels erfodert; ſo würden zwar anfänglich mehrere Looſe abgeſetzt, ohne Zweifel aber viele Looſe der letzten Klaſſe nicht renovirt werden, wodurch die Kaſſe einen beträchtlichen Verluſt erleiden könnte.

V. Rechnet man alſo Einſatz

für die 1ſte Klaſſe nicht		11 Gr. 4 $\frac{40}{50}$ Pf.,	ſondern	1 Th.
— 2te	— —	17 ꞉ 8 $\frac{4}{19}$ ꞉	—	2 ꞉
— 3te	— —	1 Th. 3 ꞉ $\frac{2}{5}$ ꞉	—	3 ꞉
— 4te	— —	1 ꞉ 13 ꞉ 5 $\frac{31}{85}$ ꞉	—	4 ꞉

ſo muſs man in der fünften und letzten Klaſſe 4 Thlr. 12 Gr. einlegen. Denn die Lotterie nimmt alsdann

bei der erſten Klaſſe	16000 Th. ein,	
— 2ten —	30400 ꞉ —	
— 3ten —	43200 ꞉ —	
— 4ten —	54400 ꞉ —	
Summe	144000 Thlr.	

alſo mangeln zur ſämmtlichen Ausgabe noch 201600 − 144000 das iſt 57600 Thlr. welche Summe die 12800 Intereſſenten der letzten Klaſſe insgeſammt beitragen müſſen, demnach giebt ein jeder $\frac{57600}{12800} = 4\frac{1}{2}$ Thlr. und die ganze Lotterie koſtet 14 Thlr. 12 Gr.

VI. Sollen die Intereſſenten der fünften Klaſſe gar nichts bezahlen; ſo ſetze man den Einſatz zur erſten

Klaſſe

Plan der zwanzigsten Leipziger Lotterie.

Erste Klasse à 1 Thlr. Einlage.

1	Gew.	à	1000	Thl.	1000	Thl.
1	—	=	800	—	800	—
2	—	=	400	—	800	—
2	—	=	200	—	400	—
3	—	=	100	—	300	—
4	—	=	50	—	200	—
5	—	=	40	—	200	—
6	—	=	30	—	180	—
7	—	=	25	—	175	—
9	—	=	15	—	135	—
20	—	=	12	—	240	—
30	—	=	8	—	240	—
100	—	=	5	—	500	—
610	—	=	4	—	2440	—
800	Gewinnste betr.				7610	Thl.

Zweite Klasse à 2 Thlr. Einlage.

1	Gew.	à	1200	Thl.	1200	Thl.
1	—	=	1000	—	1000	—
2	—	=	500	—	1000	—
2	—	=	300	—	600	—
3	—	=	150	—	450	—
4	—	=	100	—	400	—
5	—	=	50	—	250	—
6	—	=	40	—	240	—
7	—	=	30	—	210	—
9	—	=	20	—	180	—
20	—	=	15	—	300	—
30	—	=	10	—	300	—
100	—	=	8	—	800	—
610	—	=	7	—	4270	—
800	Gewinnste betr.				11200	Thl.

Dritte Klasse à 3 Thlr. Einlage.

1	Gew.	à	1400	Thl.	1400	Thl.
1	—	=	1000	—	1000	—
2	—	=	600	—	1200	—
2	—	=	300	—	600	—
3	—	=	200	—	600	—
4	—	=	150	—	600	—
5	—	=	100	—	500	—
6	—	=	50	—	300	—
7	—	=	40	—	280	—
9	—	=	30	—	270	—
20	—	=	20	—	400	—
30	—	=	15	—	450	—
100	—	=	13	—	1300	—
610	—	=	12	—	7320	—
800	Gewinnste betr.				16220	Thl.

Vierte Klasse à 4 Thlr. Einlage.

1	Gew.	à	1600	Thl.	1600	Thl.
1	—	=	1000	—	1000	—
2	—	=	700	—	1400	—
2	—	=	400	—	800	—
3	—	=	300	—	900	—
4	—	=	200	—	800	—
5	—	=	150	—	750	—
6	—	=	100	—	600	—
7	—	=	50	—	350	—
9	—	=	40	—	360	—
20	—	=	30	—	600	—
30	—	=	20	—	600	—
100	—	=	17	—	1700	—
610	—	=	16	—	9760	—
800	Gewinnste betragen				21220	Thl.

Fünfte Klasse à $4\frac{1}{2}$ Thlr Einlage.

1	Gewinnst	à	10000	Thl.	—	10000	Thl.
1	—	=	5000	—	—	5000	—
2	—	=	1600	—	—	3200	—
2	—	=	1400	—	—	2800	—
2	—	=	1200	—	—	2400	—
8	—	=	1000	—	—	8000	—
10	—	=	500	—	—	5000	—
20	—	=	200	—	—	4000	—
50	—	=	100	—	—	5000	—
100	—	=	50	—	—	5000	—
200	—	=	25	—	—	5000	—
654	—	=	20	—	—	13080	—
4150	—	=	18	—	—	74700	—
5200	Gewinnste		betragen			143180	Thl.

2 Präm. die erste und letzte Niete à 115 Thl.					230	—
2 — die Niete vor und nach						
	10000 Thl.	à	160	—	320	—
2 — —	5000 —	=	120	—	240	—
4 — —	1600 —	=	100	—	400	—
4 — —	1400 —	=	75	—	300	—
4 — —	1200 —	=	50	—	200	—
16 — —	1000 —	=	30	—	480	—
5234 Gewinnste und Prämien betragen					145350	Thl.

B I L A N Z.

Einnahme.

Erste Klasse	16000	Loose	à 1 Thl.	=	16000	Thl.
Zweite Klasse	15200	—	= 2 —	=	30400	—
Dritte Klasse	14400	—	= 3 —	=	43200	—
Vierte Klasse	13600	—	= 4 —	=	54400	—
Fünfte Klasse	12800	—	= $4\frac{1}{2}$ —	=	57600	—
			$14\frac{1}{2}$ Thl.	=	201600	Thl.

Ausgabe.

Erste Klasse	800 Gewinnste	= =	7610	Thl.
Zweite Klasse	800 —	= =	11200	—
Dritte Klasse	800 —	= =	16220	—
Vierte Klasse	800 —	= =	21220	—
Fünfte Klasse	5234 Gewinnste u. Präm.		145350	—
	8434 Gew. u. Präm. betr.		201600	Thl.

Klasse 2 Thlr. zur 2ten 3 Thlr. und zur 3ten 4 Thlr. Folglich beträgt der Einsatz zur vierten Klasse 4 Thlr. 21 Gr. $2\frac{2}{17}$ Pf. und die Lotterie kostet zusammen 13 Thlr. 21 Gr. $2\frac{2}{17}$ Pf.

BILANZ.

Einnahme.

VII)	1ste Kl.	16000 Loose à 2 Thlr.	—		32000 T.
	2te —	15200 —	3 =	—	45600 =
	3te —	14400 —	4 =	—	57600 =
	4te —	13600 —	4 = 21 G. $2\frac{2}{17}$ P.	—	66400 =
	5te —	12800 —	bezahlen nichts		
			13 T. 21 G. $2\frac{2}{17}$ Pf	=	201600 T.

Ausgabe.

wie in III.

VIII. Soll die Einlage jeder Klasse gleich viel betragen; so ist, um sie zu finden,

für die 1ste Klasse $1 : x = 16000 : 16000 . x$
— 2te — $1 : x = 15200 : 15200 . x$
— 3te — $1 : x = 14400 : 14400 . x$
— 4te — $1 : x = 13600 : 13600 . x$
— 5te — $1 : x = 12800 : 12800 . x$

wo der Buchstabe x die unbekannte Einlage jeder Klasse anzeigt. Folglich muss die Summe der Einnahme in allen fünf Klassen:

$16000 . x + 15200 . x + 14400 . x + 13600 . x + 12800 . x$
oder $(16000 + 15200 + 14400 + 13600 + 12800)\, x$
das ist $72000 . x$

so groß, als die ganze Summe 201600 Thlr. sein, welche die Lotterie auszahlt. Da man nun das 72000fache der Einlage jeder Klasse hat, so ist auch das einfache bekannt, und also die gesuchte Einlage jeder Klasse $= \frac{201600}{72000} = 2\frac{4}{5}$ Thlr. Demnach kostet alsdann die ganze Lotterie 14 Thlr.

BILANZ.

Einnahme.

IX)	1ſte Klaſſe	16000 Looſe	à $2\frac{4}{5}$ Th.	—	44800 Th.	
	2te —	15200	— $2\frac{4}{5}$ ſ	—	42560 ſ	
	3te —	14400	— $2\frac{4}{5}$ ſ	—	40320 ſ	
	4te —	13600	— $2\frac{4}{5}$ ſ	—	38080 ſ	
	5te —	12800	— $2\frac{4}{5}$ ſ	—	35840 ſ	
			14 Th.	—	201600 Thlr.	

Ausgabe.

wie in III.

X. Wollte man, daſs die Lotterie bei jeder Klaſſe gleich viel einnähme, ſo müſste die ganze Summe 201600 Thlr. durch die Anzahl der Klaſſen, nämlich durch 5 dividirt werden, welches das Kapital 40320 Thlr. gäbe. Alſo wäre für die

1. Kl.	16000 : 40320 = 1 :	*Einlage zur* 1. *Kl.* =	2 Th.	12 Gr.	$5\frac{19}{25}$ Pf.
2. ſ	15200 : 40320 = 1 :	— — 2. ſ =	2 ſ	15 ſ	$7\frac{91}{95}$ ſ
3. ſ	14400 : 40320 = 1 :	— — 3. ſ =	2 ſ	19 ſ	$2\frac{2}{5}$ ſ
4. ſ	13600 : 40320 = 1 :	— — 4. ſ =	2 ſ	23 ſ	$1\frac{71}{85}$ ſ
5. ſ	12800 : 40320 = 1 :	— — 5. ſ =	3 ſ	3 ſ	$7\frac{1}{5}$ ſ

und die Summe aller Einlagen oder ein Loos werth 14 Th. 2 Gr. $1\frac{1237}{8075}$ Pf.

§. 4.

Zusätze. Für ein Loos ſind die Wahrſcheinlichkeiten in der Leipziger Lotterie zu gewinnen folgende, als:

in der 1ſten Klaſſe = $\frac{1}{20}$ *der Gewiſsheit*

— 2ten — = $\frac{1}{19}$ — —

— 3ten — = $\frac{1}{18}$ — —

— 4ten — = $\frac{1}{17}$ — —

— 5ten — = $\frac{5234}{12800}$ oder $\frac{1}{2\frac{583}{2617}}$

Man findet ſie nämlich für jede Klaſſe, wenn man die Anzahl der Nummern, die darinnen gewinnen, durch

die Menge der Spieler daſelbſt dividirt. Alſo iſt für die erſte Klaſſe die Wahrſcheinlichkeit $\frac{800}{16000} = \frac{8}{160} = \frac{1}{20}$; u.ſ.w.

Die Wahrſcheinlichkeit zu verlieren iſt

$$\text{für die 1ſte Klaſſe} = 1 - \tfrac{1}{20} = \tfrac{19}{20} = \frac{1}{1\tfrac{1}{19}}$$

$$\text{— 2te —} = 1 - \tfrac{1}{19} = \tfrac{18}{19} = \frac{1}{1\tfrac{1}{18}}$$

$$\text{— 3te —} = 1 - \tfrac{1}{18} = \tfrac{17}{18} = \frac{1}{1\tfrac{1}{17}}$$

$$\text{— 4te —} = 1 - \tfrac{1}{17} = \tfrac{16}{17} = \frac{1}{1\tfrac{1}{16}}$$

$$\text{— 5te —} = 1 - \tfrac{2617}{6400} = \tfrac{3783}{6400} = \frac{1}{1 \frac{1}{1\tfrac{1166}{2617}}}$$

§. 5.

Kauft man zwei Looſe; ſo iſt für die 1ſte Klaſſe die Anzahl der günſtigen Fälle *) =

$$\frac{15998 \ldots\ldots (15998 - 798 + 1)}{1 \,.\, 2 \,\ldots\ldots\, 798} = \frac{15998 \ldots\ldots 15201}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 798}$$

und die Anzahl aller =

$$\frac{16000 \ldots\ldots 15201}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 800};$$

folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs beide Looſe zugleich herauskommen, für die erſte Klaſſe =

$$\frac{15998 \ldots\ldots 15201}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 798} : \frac{16000 \ldots\ldots 15201}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 800} =$$

$$\frac{799 \,.\, 800}{16000 \,.\, 15999} = \frac{799}{319980} = \frac{1}{400\tfrac{380}{799}};$$

und die entgegengeſetzte, das heiſst, diejenige Wahrſcheinlichkeit, daſs nicht beide Looſe zugleich, d. i.

*) *Käſtners* Analyſis endlicher Gröſsen §. 740.

höchſtens ein Loos (alſo auch gar keins) herauskommt,

$$= 1 - \frac{1}{400\frac{380}{799}} = \frac{319181}{319980} = \frac{1}{1\frac{799}{319181}}.$$ Für die zweite

Klaſſe iſt die Anzahl der günſtigen Fälle =

$$\frac{15198 \ldots\ldots (15198 - 798 + 1)}{1 . 2 \ldots\ldots 798} = \frac{15198 \ldots\ldots 14401}{1 . 2 \ldots 798}$$

und die Anzahl aller =

$$\frac{15200 \ldots (15200 - 800 + 1)}{1 . 2 \ldots\ldots 800} = \frac{15200 \ldots 14401}{1 . 2 \ldots 800};$$

alſo die Wahrſcheinlichkeit, daſs zwei beſtimmte Nummern in der Ziehung der zweiten Klaſſe herauskommen =

$$\frac{15198 \ldots 14401}{1 . 2 \ldots 798} : \frac{15200 \ldots 14401}{1 . 2 \ldots 800} = \frac{799 . 800}{15199 . 15200} =$$

$$\frac{799}{288781} = \frac{1}{361\frac{342}{799}};$$ und die entgegengeſetzte oder diejenige Wahrſcheinlichkeit, daſs höchſtens eine derſelben herauskommt =

$$1 - \frac{799}{288781} = \frac{287982}{288781} = \frac{1}{1\frac{799}{287982}}.$$

Auf eben die Art findet man für die dritte Klaſſe die Wahrſcheinlichkeit, daſs beide Nummern herauskommen werden =

$$\frac{14398 \ldots 13601}{1 . 2 \ldots 798} : \frac{14400 \ldots 13601}{1 . 2 \ldots 800} =$$

$$\frac{799 . 800}{14399 . 14400} = \frac{799}{259182} = \frac{1}{324\frac{306}{799}}$$

hievon iſt die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit

$$= 1 - \frac{799}{259182} = \frac{258383}{259182} = \frac{1}{1\frac{799}{258383}};$$

und für die vierte Klaſſe

$$\frac{13598 \ldots\ldots 12801}{1 . 2 \ldots\ldots 798} : \frac{13600 \ldots\ldots 12801}{1 . 2 \ldots\ldots 800} =$$

$$\frac{799 \cdot 800}{13599 \cdot 13600} = \frac{799}{231183} = \frac{1}{289\frac{272}{799}}$$

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{799}{231183} = \frac{230384}{231183} = \frac{1}{1\frac{799}{230384}};$$

endlich für die fünfte Klasse

$$\frac{12798 \ldots (12798-5232+1)}{1 \cdot 2 \ldots 5232} : \frac{12800 \ldots (12800-5234+1)}{1 \cdot 2 \ldots 5234}$$

$$= \frac{12798 \ldots 7567}{1 \cdot 2 \ldots 5232} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots 5234}{12800 \ldots 7567} = \frac{5234 \cdot 5233}{12800 \cdot 12799} =$$

$$\frac{2617 \cdot 5233}{6400 \cdot 12799} = \frac{13\,694\,761}{81\,913\,600} = \frac{1}{3\frac{13439795}{13694761}},$$

die entgegengesetzte =

$$1 - \frac{13\,694\,761}{81\,913\,600} = \frac{68\,218\,839}{81\,913\,600} = \frac{1}{1\frac{13694761}{68218839}}.$$

§. 6.

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei Loose herauskommen,

für die 1ste Klasse $\frac{800}{16000} \cdot \frac{799}{15999} \cdot \frac{798}{15998}$,

— 2te — $\frac{800}{15200} \cdot \frac{799}{15199} \cdot \frac{798}{15198}$,

— 3te — $\frac{800}{14400} \cdot \frac{799}{14399} \cdot \frac{798}{14398}$,

— 4te — $\frac{800}{13600} \cdot \frac{799}{13599} \cdot \frac{798}{13598}$,

— 5te — $\frac{5234}{12800} \cdot \frac{5233}{12799} \cdot \frac{5232}{12798}$.

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass vier Loose herauskommen, für die erste Klasse:

$$\frac{800}{16000} \cdot \frac{799}{15999} \cdot \frac{798}{15998} \cdot \frac{797}{15997};$$

und so weiter.

§. 7.

Ueberhaupt ist für *n* Loose, wenn *q* gezogen werden und *m* in dem Rade sind, die Wahrscheinlichkeit, dass diese *n* Nummern in der nächsten Ziehung herauskommen werden =

$$\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-(q-n)+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-n)} :$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots q} \quad \text{oder}$$

$$\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (q-n)} :$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots q} =$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots\ldots(q-n+2)(q-n+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit hievon, das heisst diejenige, dass höchstens $(n-1)$ Nummern herauskommen, ist =

$$1 - \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}.$$

§. 8.

Die Frage läſst sich noch allgemeiner folgendergestalt abfassen: *m Loose sind in dem Rade, q werden gezogen, n gekauft, davon just r herauskommen sollen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit?*

Die Auflösung dieser Frage, nebst andern hieher gehörigen Untersuchungen, findet man in dem nächstfolgenden fünften Kapitel §. 14. und folgg.

Kapitel V.

Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle zugleich ereignen.

§. 1.

Es kann verlangt werden, daſs von der Anzahl aller Fälle $= m$, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen, entweder nur ein einziger Fall, oder auch eine gewiſse Anzahl q dieser Fälle sich ereignen soll.

Wenn man im ersten Falle eine Parthie von diesen m Fällen besonders auswählt, die Anzahl der ausgesonderten Fälle $= n$ setzt, und eine Begebenheit in der Ereigniſs eines der ausgesonderten Fälle, es sei welcher es wolle, bestehet: so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit $= \frac{n}{m}$. Soll man z. B. aus einem Haufen von 32 Karten eines Piketspiels blindlings und ohne zu wählen ein einziges Blatt, und zwar Tref ziehen: so sind die Trefblätter an der Zahl $= 8$, die ausgesonderten Karten; und die Wahrscheinlichkeit der verlangten Begebenheit ist $= \frac{8}{32}$ oder $\frac{1}{4}$.

Wenn man im zweiten Falle auch eine Parthie von den sämmtlichen Fällen aussondert, und die Zahl der ausgesonderten Fälle $= n$ ist, hingegen eine Begebenheit auf dem Geschehen der Menge r von den ausgesonderten Fällen beruhet: oder wenn man z. B. aus den 32 Karten eines Piketspiels 9 Stük blindlings ziehen soll, und unter diesen 9 gezogenen Karten (just, oder wenigstens, oder höchstens) fünf Blätter aus Tref, ohne zu bestimmen welche, sich befinden sollen: so ist alsdann die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit nicht mehr $\frac{n}{m}$ und nicht mehr $\frac{1}{4}$;

und der Gegenstand des gegenwärtigen Kapitels ist, diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn m die Anzahl aller Fälle bedeutet, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen; so ist die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten q von diesen Fällen sich ereignen können* (oder die Menge aller Verbindungen nach q von diesen m Fällen) $\frac{m \cdot (m-1) \ldots \ldots (m-q+1)}{1 \ldots \ldots q}$.*)

Beweis. Die Buchstaben a, b, c, d, f etc. mögen die m gegebenen Fälle andeuten: so ist

1) die Anzahl der Arten, auf welche ein einziger von diesen Fällen sich zutragen kann, $= m$ oder $\frac{m}{1}$.

2) Die Anzahl der Arten, auf welche zwei von den m gegebenen Fällen sich ereignen können, wird durch die Glieder folgender Tafel angegeben:

ab				
ac	*bc*			
ad	*bd*	*cd*		
af	*bf*	*cf*	*df*	
—	—	—	—	—

in welcher die Anzahl der Buchstaben m ist. Nun ist die Anzahl der Glieder $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (m-4) + (m-3) + (m-2) + (m-1)$; folglich die Summe derselben (Kap. III. §. 16) $= \frac{m\,(m-1)}{1 \cdot 2}$ die gesuchte Zahl der Verbindungen nach 2.

*) Wie aus des H. Hofr. *Kästners* Analysis endlicher Grössen §. 740 erhellet. Wer übrigens nicht eben viel Schärfe im Beweise verlangt, kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes durch eine gemeine Induktion aus dem nun folgenden Beweise versichern.
Anm. des Uebers.

3) Die Anzahl der Arten, auf welche drei von den m gegebenen Fällen ſich ereignen können, giebt folgende Tafel:

abc			
abd	*acd*		
abf	*acf*	*adf*	
—	—	—	—
	bcd		
	bcf	*bdf*	
	—	—	—
		cdf	
		—	—
			—

in welcher die Anzahl der Buchſtaben m iſt. Nun iſt die Zahl der Glieder $= 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots =$ der Summe der $(m-2)$ erſten Triangularzahlen, folglich iſt (Kap. III. §. 16.) $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ die geſuchte Zahl der Verbindungen nach 3.

4)* Eben ſo giebt die Anzahl der Arten, auf welche vier von den m gegebenen Fällen ſich ereignen können, folgende Tafel:

abcd		
abcf		
abdf	*acdf*	
—	—	—
	bcdf	
	—	—
		—

worin die Anzahl der Buchſtaben $= m$ iſt. Nun iſt die Zahl der Glieder $= 1 + 4 + 10 +$ etc. die Summe von den $(m-3)$ erſten Gliedern der Reihe der Quadrangularzahlen; folglich die geſuchte Menge der Verbindungsarten $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Und ſo ferner wird die Menge aller Verbindungen von m Dingen nach 5, die

Summe von den $(m-4)$ ersten Gliedern der Reihe der Quinquangularzahlen; die Menge der Verbindungen nach 6 von m Dingen, die Summe von $(m-5)$ Gliedern der Reihe der Sexangularzahlen; u. s. w. folglich überhaupt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche die Zahl q von den m gegebenen Fällen sich zugleich ereignen kann, die Summe der $m-(q-1)=m-q+1$ ersten qtangularzahlen sein, $= \frac{m.(m-1)\ldots.(m-q+1)}{1.2\ldots.q}$.

W. Z. E.

§. 3.

Zum Beispiel. Aus einem Piketspiel von 32 gemischten Karten soll man blindlings und ohne zu wählen 15 Blätter herausziehen: man verlangt zu wissen, auf wie viel gleich mögliche Arten die Summe der gezogenen Karten zusammengesetzt sein kann. Dieses zu finden, setze man in der allgemeinen Formel $\frac{m\ldots.(m-q+1)}{1.2\ldots.q}$, $m=32$, $q=15$; so verwandelt sie sich in $\frac{32\ldots.18}{1.2\ldots.15}$ $= 565\,722\,720$, welches die gesuchte Zahl ist.

§. 4.*

Aufgabe. *Zu finden, auf wie viel Arten man eine gegebene Menge von Fällen in eine gegebene Anzahl Theile zerlegen kann.*

Auflösung. Es sei m die gegebene Menge von Fällen, welche in mehrere, z. B. in n Theile eingetheilt werden sollen; der erste Theil enthalte q, der zweite q', der dritte q'', und so weiter, der $(n-1)$te $q^{n-''}$, und also der nte, $m-q-q'-q''-\ldots.-q^{n-''}$ von den m gegebenen Fällen: so ist die gesuchte Zahl

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-q+1)}{1.2\ldots.q}.\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots.(m-q-q'+1)}{1.2\ldots\ldots.q'}\times$$

$$\frac{(m-q-q')(m-q-q'-1)\ldots(m-q-q'-q''+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,q''}\times\ldots\ldots\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q''-\ldots-q^{n-'''})\ldots(m-q-q'-q''-\ldots-q^{n-'''}-q^{n-''}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,q^{n-''}}.$$

Im Beweiſe, der in den folgenden (§. 5. = §. 12.) enthalten iſt, kommen (§. 12. in der Anmerk.) noch drei andere, mit dieſer gleichgültige Formeln vor.

§. 5.

Die Menge aller Verbindungen nach q von m Dingen (§. 2.) zeigt auch an, auf wie viel Arten man m Fälle in zwei Theile, davon der eine Theil q, und der andere die übrigen $m-q$ Fälle enthält, eintheilen kann. Alſo iſt die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel Arten man m Fälle in zwei Theile eintheilen kann, davon der eine q dieſer Fälle, und der andere die $(m-q)$ übrigen Fälle enthält, $\frac{m\ldots\ldots(m-q+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots q}$, oder (weil die Menge der Verbindungen nach q von m Dingen, den nach $m-q$ von m Dingen gleich iſt, Kap. III. §. 14, 17.) $\frac{m\ldots\ldots(q+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(m-q)}$.

Zum Beiſpiel. Wenn zu wiſſen verlangt wird, auf wie viel Arten man aus den 32 Karten des Piketſpiels zwei Theile machen kann, davon der eine 27, und der andere Theil 5 Blätter enthält; ſo findet man die geſuchte Zahl:

$$\frac{32\ldots\ldots6}{1\,.\,2\ldots\ldots27} \text{ oder } \frac{32\ldots\ldots28}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 201376.$$

§. 6.*

Eine gegebene Menge von Fällen, m, in 3 Theile, davon der erſte q, der zweite q', und alſo der dritte Theil $m-q-q'$ Fälle von m enthält, eintheilen, heiſst eben ſo viel, als aus dieſer gegebenen Menge m von Fällen erſtlich q, und alsdann aus den übrigen $(m-q)$ Fällen q' herausnehmen. Sollen alſo m Fälle in obgedachte

drei Theile eingetheilt werden; ſo wird die Zahl der möglichen Arten folgendergeſtalt gefunden.

§. 7.

Es heiſse m die Anzahl aller Fälle: ich ſage, wenn eine Anzahl q dieſer Fälle ſich zugleich ereignen ſoll; und hierauf q' von den $m-q$ übrigen Fällen ſich ebenfalls zugleich ereignen ſollen; ſo ſei die Zahl, welche angiebt, auf wie viel Arten ſolches geſchehen kann,

$$\frac{m \ldots\ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q} \cdot \frac{(m-q) \ldots\ldots (m-q-q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q'}.$$

Denn die Zahl der Arten, auf welche die q Fälle, die ſich anfänglich ereignen ſollen, ſich ereignen können, iſt $\frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q}$ (§. 2.); aber zu jeder von dieſen Arten können diejenigen q' Fälle, welche ſich nachher ereignen ſollen, auf $\frac{(m-q) \ldots (m-q-q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q'}$ Arten ſich ereignen. Folglich iſt die Anzahl der Arten, auf welche die beſtimmte Begebenheit ſich zutragen kann, das Produkt:

$$\frac{m \ldots\ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q} \cdot \frac{(m-q)\,(m-q-1) \ldots\ldots (m-q-q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q'} \text{*)}$$

Zum Beiſpiel. Wenn man zu wiſſen verlangt, auf wie viel Arten aus einem Piketſpiel 12 Blätter, und hier-

*) Oder $= \frac{m \ldots\ldots (q+1)}{1.2 \ldots (m-q)} \cdot \frac{(m-q) \ldots\ldots (q'+1)}{1.2 \ldots\ldots (m-q-q')}$; weil die Menge der Verbindungen nach q' von $m-q$ Dingen mit der nach $m-q-q'$ von eben ſo viel Dingen einerlei iſt. Dieſe zweite Formel iſt aber eben ſo viel als $\frac{m\,(m-1) \ldots\ldots (q+1)}{1.2 \ldots q'.1.2 \ldots (m-q-q')}$; und dieſer Ausdruk iſt wiederum $= \frac{m\,(m-1) \ldots\ldots (q'+1)}{1.2 \ldots\ldots q.1.2 \ldots\ldots (m-q-q')}$; weil $m.(m-1) \ldots\ldots (q+1)\, q \ldots 2.1 = m\,(m-1) \ldots (q'+1)\, q' \ldots 2.1.$

Anmerk. d. Ueberſ.

auf aus den übrigen 20 Blättern 8 dazu genommen werden können: so setze man in der gefundenen Formel $m = 32$; $q = 12$; $q' = 8$; alsdann verwandelt sie sich in

$$\frac{32 \ldots 21}{1.2 \ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots 13}{1.2 \ldots 8} = 28\,443\,124\,004\,800,$$

welches die gesuchte Zahl ist.

§. 8.*

Also ist die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel Arten man m Fälle in drei Theile eintheilen kann, davon der erste q dieser Fälle, der andere q', und der dritte die $m-q-q'$ übrigen Fälle enthält,

$$= \frac{m \ldots (m-q+1)}{1.2 \ldots q} \cdot \frac{(m-q) \ldots (m-q-q'+1)}{1.2 \ldots q'}$$

oder $$\frac{m \ldots (q+1)}{1.2 \ldots (m-q)} \cdot \frac{(m-q) \ldots (q'+1)}{1.2 \ldots (m-q-q')}$$

oder $$\frac{m\,(m-1) \ldots (q+1)}{1.2 \ldots q' . 1.2 \ldots (m-q-q')}$$

oder endlich $$\frac{m\,(m-1) \ldots (q'+1)}{1.2 \ldots q . 1.2 \ldots (m-q-q')}.$$

Zum Beispiel. Verlangt man zu wissen, auf wie viel Arten aus einem Piketspiel 12 Blätter, und alsdann aus den übrig gebliebenen 20 Blättern, noch 11 dazu genommen werden können, oder auf wie viel Arten 32 Karten in drei Theile, den ersten aus 12, den 2ten aus 11, und den 3ten aus 9 Blättern bestehend, eingetheilt werden können; so setzt man

$m=32$, $q=$	12	12	11	11	9	9
$q'=$	11	9	12	9	12	11
$m-q-q'=$	9	11	9	12	11	12

welches die gesuchte Zahl giebt: $\frac{32 \ldots 21}{1.2 \ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots 10}{1.2 \ldots 11}$

$$= \frac{32 \ldots 13}{1.2 \ldots 20} \cdot \frac{20 \ldots 12}{1.2 \ldots 9} = \frac{32 \ldots 13}{1.2 \ldots 11 . 1.2 \ldots 9} = \frac{32 \ldots 12}{1.2 \ldots 12 . 1.2 \ldots 9}.$$

§. 9. *

Soll demnach eine gegebene Menge m von Fällen in vier Theile eingetheilt werden: so daſs der 1ſte, q; der 2te, q'; der 3te, q''; und alſo der 4te, $m-q-q'-q''$ Fälle enthält; ſo iſt die geſuchte Zahl:

$$\frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \ldots q} \cdot \frac{(m-q) \ldots (m-q-q'+1)}{1 \cdot 2 \ldots q'} \times \frac{(m-q-q') \ldots (m-q-q'-q''+1)}{1 \cdot 2 \ldots q''}$$ oder

$$\frac{m \ldots (q+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q)} \cdot \frac{(m-q) \ldots (q'+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q-q')} \cdot \frac{(m-q-q') \ldots (q''+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q-q'-q'')} =$$

$$\frac{m \; (m-1) \ldots (q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q' \cdot 1 \cdot 2 \ldots q'' \cdot 1 \cdot 2 \ldots (m-q-q'-q'')} =$$

$$\frac{m \; (m-1) \ldots (q''+1)}{1 \cdot 2 \ldots q \cdot 1 \cdot 2 \ldots q' \cdot 1 \cdot 2 \ldots (m-q-q'-q'')}.$$

§. 10.*

Sollen m Dinge in 5 Theile: $q, q', q'', q''', m-q-q'-q''-q'''$ getheilt werden; ſo iſt die Anzahl der Arten:

$$\frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q} \cdot \frac{(m-q) \ldots (m-q-q'+1)}{1 \cdot 2 \ldots q'} \times$$

$$\frac{(m-q-q') \ldots (m-q-q'-q''+1)}{1 \cdot 2 \ldots q''} \times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'') \ldots (m-q-q'-q''-q'''+1)}{1 \cdot 2 \ldots q'''}$$

oder

$$\frac{m \ldots (q+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q)} \cdot \frac{(m-q) \ldots (q'+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q-q')} \times$$

$$\frac{(m-q-q') \ldots (q''+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q-q'-q'')} \cdot \frac{(m-q-q'-q'') \ldots (q'''+1)}{1 \cdot 2 \ldots (m-q-q'-q''-q''')} =$$

$$\frac{m \cdot (m-1) \ldots (q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q' \cdot 1 \cdot 2 \ldots q'' \cdot 1 \cdot 2 \ldots q''' \cdot 1 \cdot 2 \ldots (m-q-q'-q''-q''')} =$$

$$\frac{m\,.\,(m-1)\,\ldots\,.\,(q'''+1)}{1.2\ldots.q.1.2\ldots.q'.1.2\ldots q''.1.2\ldots.(m-q-q'-q''-q''')}$$

§. 11.*

Für m Dinge in 6 Theile: q, q', q'', q''', q^{IV}, $m-q-q'-q''-q'''-q^{IV}$, ist die gesuchte Zahl der Arten:

$$\frac{m.\,.\,(m-q+1)}{1.2\ldots.q}\cdot\frac{(m-q)\ldots.(m-q-q'+1)}{1.2\ldots.q'}\times$$

$$\frac{(m-q-q')\ldots\ldots(m-q-q'-q''+1)}{1.2\ldots.q''}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')\ldots.(m-q-q'-q''-q'''+1)}{1.2\ldots.q'''}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q''-q''')\ldots.(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV}+1)}{1.2\ldots.q^{IV}} \text{ oder}$$

$$\frac{m\ldots.(q+1)}{1.2\ldots.(m-q)}\cdot\frac{(m-q)\ldots.(q'+1)}{1.2\ldots.(m-q-q')}\cdot\frac{(m-q-q')\ldots.(q''+1)}{1.2\ldots.(m-q-q'-q'')}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')\ldots(q'''+1)}{1.2\ldots.(m-q-q'-q''-q''')}\cdot\frac{(m-q-q'-q''-q''')\ldots.(q^{IV}+1)}{1.2\ldots.(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV})}=$$

$$\frac{m\,(m-1)\ldots.(q+1)}{1.2\ldots.q'\,1.2\ldots.q''.1.2\ldots.q'''\,1.2\ldots q^{IV}.1.2\ldots.(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV})}=$$

$$\frac{m\,(m-1)\ldots.(q^{IV}+1)}{1.2\ldots.q.1.2\ldots.q'.1.2\ldots.q''.1.2\ldots.q'''.1.2\ldots.(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV})}.$$

§. 12.

Wenn also überhaupt m die Anzahl aller Fälle ist, davon q zuerst, und alsdann q' von den übrigen $m-q$, hierauf q'' von den übrig gebliebenen $m-q-q'$, dann q''' von den noch übrigen $m-q-q'-q''$, und so weiter, sich ereignen sollen; oder: wenn m Fälle in mehrere Theile eingetheilet werden sollen, davon der erste q, der zweite q', der dritte q'', der vierte q''', und so ferner, Fälle enthält: so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten,

auf welche diese Wirkung statt haben kann:

$$\frac{m\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q} \times$$

$$\frac{(m-q)\,(m-q-1)\,.\,.\,.\,.\,(m-q-q'+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q'} \times$$

$$\frac{(m-q-q')\,(m-q-q'-1)\,.\,.\,.\,.\,(m-q-q'-q''+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q''} \times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')(m-q-q'-q''-1)\,.\,.\,.\,.\,(m-q-q'-q''-q'''+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q'''} \times \text{etc.}^{*)}$$

Zum Beispiel. 1. Die 32 Piketkarten sollen unter die beiden Spieler und Kaufkarte ausgetheilt; oder, welches einerlei ist, in drei Theile, nämlich in zwei Theile von 12 und einen Theil von 8 Karten, zerlegt werden: man

*) Oder $$\frac{m\,.\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-q)} \times$$

$$\frac{(m-q)\,(m-q-1)\,.\,.\,.\,.\,(q'+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-q-q')} \times$$

$$\frac{(m-q-q')(m-q-q'-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(q''+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-q-q'-q'')} \times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')\,(m-q-q'-q''-1)\,.\,.\,.\,.\,(q'''+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-q-q'-q''-q''')} \times \text{etc.}$$

Es ist nämlich allemal ein Faktor weniger als Theile von m gemacht werden sollen. Bei n Theilen von m giebt es also $n-1$ Faktoren, deren Gesetz in Ansehung der Aufeinanderfolge deutlich in die Augen fällt. Oder noch anders für n Theile von m:

$$\frac{m\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,(q+1)}{1.2..q'.1.2..q''..1.2..q^{n-'''}.1.2..q^{n-''}.1.2..(m-q-q'-q''-q'''-q^{V}-..-q^{n-'})} =$$

$$\frac{m\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,(q^{n-''}+1)}{1.2...q.1.2...q'....1.2...q^{n-IV}.1.2...q^{n-'''}.1.2...(m-q-q'-q''-...-q^{n-''})}.$$

Anm. des Uebers.

man fragt, auf wie viel mögliche Arten sich diese Theile zusammensetzen lassen?

Hier ist $m=32$, $n=3$, $q=12$, $q^{n-''}=q^{'''-''}=q'=12$; folglich $m-q-q'=8$ gesetzt, die gesuchte Zahl:

$$\frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}\cdot\frac{(m-q)\ldots(m-q-q'+1)}{1.2\ldots q'}=\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots9}{1.2\ldots12}=$$

$$\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}=28\,443\,124\,004\,800;$$ oder $q=12$, $q'=8$,

also $m-q-q'=12$ gesetzt: $\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}$ wie vorher;

oder auch $q=8$, $q'=12$, also $m-q-q'=12$, $\frac{32\ldots25}{1.2\ldots8}\cdot\frac{24\ldots13}{1.2\ldots12}=$

$$\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}.$$

2) Will man wissen, auf wie viel Arten die 52 Kartenblätter des ganzen Spiels unter die vier Spieler im Wisk ausgetheilt werden können, oder welches einerlei ist, auf wie viel Arten man diese 52 Karten in vier gleiche Theile, davon jeder 13 Karten enthält, eintheilen kann; so setze man in der gefundenen Formel $m=52$, $q=13=q'=q''=m-q-q'-q''$; welches die gesuchte Zahl

giebt $=\frac{52\ldots40}{12\ldots13}\cdot\frac{39\ldots27}{1.2\ldots13}\cdot\frac{26\ldots14}{1.2\ldots13}=$

$$\frac{52\ldots14}{1.2\ldots39}\cdot\frac{39\ldots14}{1.2\ldots26}\cdot\frac{26\ldots14}{1.2\ldots13}=8565126197851151797861440000.$$

§. 13. *

Sollen m Fälle in n gleiche Theile eingetheilt werden; so geben die vorigen Formeln die Anzahl der Arten, auf welche dieses geschehen kann

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(q+1)}{(1\,.\,2\ldots\ldots q)^{n-1}}$$

Es ist demnach für das zweite Beispiel in §. 12 die gesuchte Zahl $= \frac{52 . 51 \ldots . 14}{(1 . 2 \ldots 13)^3}$.

Für $m = n$ verwandelt sich aber die eben gefundene Formel in $m\,(m-1) \ldots . 3 . 2$.

§. 14.

Lehrsatz. *Es heisse m die Anzahl aller Fälle, wenn sich nur ein einziger Fall ereignen soll: und man setze nun*

1) dass eine Anzahl q von diesen Fällen sich gewiss ereigne;

2) dass man aus der ganzen Anzahl von m Fällen eine Parthie aussondere, und die Anzahl der ausgesonderterten Fälle $= n$ sei;

3) dass eine bestimmte Begebenheit in dem Geschehen just der Anzahl r von den ausgesonderten Fällen bestehe;

so wird die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit sein

$$\frac{n(n-1) \ldots . (n-r+1)}{1 . 2 \ldots . r} . \frac{(m-n)(m-n-1) \ldots . (m-n-q+r+1)}{1 . 2 \ldots . (q-r)} : \frac{m\,(m-1) \ldots . (m-q+1)}{1 . 2 \ldots . q}.$$

Beweis. 1) Von der Anzahl n der ausgesonderten Fälle kann sich die Anzahl r auf so viel Arten ereignen als die Zahl $\frac{n \ldots (n-r+1)}{1 . 2 \ldots r}$ angiebt (§. 2). Allein zu jeder von diesen Arten können sich $q-r$ aus der Anzahl $m-n$ der nicht ausgesonderten Fälle auf so viel Arten ereignen, als die Zahl $\frac{(m-n) \ldots . (m-n-q+r+1)}{1 . 2 \ldots . (q-r)}$ anzeigt. Folglich ist die Anzahl der gleich möglichen Arten die bestimmte Begebenheit zu erhalten, oder welches einerlei ist, die Menge derjenigen Fälle welche für diese Begebenheit günstig sind, das ist der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit, das Produkt

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)}.$$

2) Von den sämmtlichen m Fällen können sich q auf so viel Arten ereignen, als durch folgende Zahl $\frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$ angezeigt wird; folglich ist dieser Ausdruk die Menge aller möglichen Fälle, d. i. der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

3) Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (Kap. I. §. 10.)

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)} : \frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}.$$

W. Z. E.

§. 15.*

Dieses ist zugleich die (Kap. IV. §. 8.) versprochene Auflösung; die jezt vorkommenden n ausgesonderten Fälle sind nämlich die am a. O. gekauften n Loose.

Beispiele. 1) Man kauft in der 20sten Leipziger Lotterie drei Nummern, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, dass just zwei davon, das heist, weder mehr noch weniger als zwei, bei der ersten Ziehung herauskommen werden; so ist $m = 16000$, $q = 800$, $n = 3$, $r = 2$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15997 \cdot 15996 \ldots 15200}{1 \cdot 2 \ldots 798} : \frac{16000 \cdot 15999 \ldots 15201}{1 \cdot 2 \ldots 800}$$

$$= \frac{3 \cdot 15200 \cdot 799 \cdot 800}{16000 \cdot 15999 \cdot 15998} = \frac{910860}{127976001} = \frac{1}{140\frac{455601}{910860}}.$$

Für die zweite Klasse ist die Wahrscheinlichkeit dass von drei gekauften Loosen just zwei herauskommen werden

$$\frac{3 \cdot 14400 \cdot 799 \cdot 800}{15200 \cdot 15199 \cdot 15198} = \frac{17258400}{2194446819} = \frac{1}{127\frac{2630019}{17258400}}$$

und so weiter.

2) Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Zahlen-Lotto nur eine von 75 gekauften Nummern herauskommen wird? Hier iſt $m=90$, $q=5$, $n=75$ und $r=1$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{75}{1} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$\frac{11375}{4883252} = \frac{1}{429\frac{3377}{11375}}.$$

3) Sollen die fünf gezogenen Nummern aus den 75 gekauften ſein; ſo iſt $q=r=5$, und die Wahrſcheinlichkeit in dieſem Falle $\frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 73 \cdot 71}{11 \cdot 89 \cdot 86 \cdot 29}$

$$= \frac{958855}{2441626} = \frac{1}{2\frac{523916}{958855}}.$$

§. 16.

Aus einem Piketſpiel werden blindlings 9 Karten zu ziehen erlaubt: wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich unter ihnen fünf aus Pik befinden? Es iſt $m=32$, $q=9$, $n=8$, $r=5$; alſo $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{32 \ldots 24}{1 \cdot 2 \ldots 9}$

$= \frac{12397}{58435}$ die geſuchte Wahrſcheinlichkeit.

§. 17.

Wenn in der allgemeinen Formel

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)} : \frac{m \ldots (m\;\; q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q},$$

$r=0$ iſt; ſo bekömmt man

$$\frac{(m-n)\,(m-n-1) \ldots (m-n-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q} : \frac{m\,(m-1) \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$$

oder $\frac{(m-n)\,(m-n-1) \ldots (m-n-q+1)}{m\,(m-1) \ldots (m-q+1)}$

welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs keiner von den n ausgeſonderten Fällen ſich ereignen wird.

§. 18.

Wenn man dieſe letztere Formel von der Einheit abziehet; ſo erhält man

$$1 - \frac{(m-n)\ldots(m-n-q+1)}{1.2\ldots q} : \frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$$ für die

Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens einer von den ausgeſonderten Fällen ſich zutragen wird. (Kap. I. §. 14.)

§. 19.

Zum Beiſpiel. 1) Die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Zahlen-Lotto von 75 gekauften Nummern in der nächſten Ziehung keine einzige herauskommen wird, findet man, wenn man in der Formel

$$\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+1)}{1.2\ldots q} : \frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q},$$

$m = 90$, $n = 75$, und $q = 5$ ſetzt; ſie iſt demnach

$$\frac{15\ldots11}{1.2\ldots5} : \frac{90\ldots86}{1.2\ldots5} = \frac{15.14.13.12.11}{90.89.88.87.86}{}^{*)} = \frac{1001}{14649756};$$ Und

$$1 - \frac{1001}{14649756} = \frac{14648755}{14649756}$$ wird die Wahrſcheinlichkeit

ſein, daſs in der nächſten Ziehung (keine nicht, das heiſt) wenigſtens eine von den 75 gewählten Nummern herauskommen wird.

2)* Kauft man in der zwanzigſten Leipziger Lotterie ein Loos; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs daſſelbe in der erſten Klaſſe nicht herauskommt

$$= \frac{(m-n)\ldots(m-n-q+1)}{m\ldots(m-q+1)} = \frac{15999\ldots15200}{16000\ldots15201} = \frac{15200}{16000} = \frac{19}{20}$$ (S. Kap. IV. §. 4.).

*) $= (1-\frac{75}{90}).(1-\frac{75}{89}).(1-\frac{75}{88}).(1-\frac{75}{87}).(1-\frac{75}{86})$. Man vergleiche Kap. II. §. 6. *Anm. des Ueberſ.*

3)* Die Wahrſcheinlichkeit daſs von zwei bis zur letzten Klaſſe übrig gebliebenen Nummern nicht eine einzige gewinnen wird, iſt

$$= \frac{(m-2)\ldots\ldots(m-q-1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)} = \frac{(m-q)(m-q-1)}{m(m-1)}$$

$$= \left(1-\frac{q}{m}\right).\left(1-\frac{q}{m-1}\right) = \left(1-\frac{5234}{12800}\right).\left(1-\frac{5234}{12799}\right)$$

$= \frac{5723679}{16382720}$; Die Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens eine davon gewinnen wird, iſt $1 - \frac{5723679}{16382720} = \frac{10659041}{16382720}$.

4)* Die Wahrſcheinlichkeit daſs unter neun aus einem Piketſpiel blindlings herausgezogenen Karten ſich auch nicht eine aus Pik befinden wird, iſt =

$$\frac{24 . 23 . 22 . 21 . 20 . 19 . 18 . 17 . 16}{32 . 31 . 30 . 29 . 28 . 27 . 26 . 25 . 24} = \frac{81719}{1753050};$$

Alſo iſt diejenige Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens ein Pikblatt darunter ſein wird

$$1 - \frac{81719}{1753050} = \frac{1671331}{1753050}.$$

5)* Iſt in dem zuletzt gewählten Beiſpiele $q = 25 (= 3 . 8 + 1)$; ſo wird die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$\frac{24\ldots.2.1.0}{32\ldots.24} = 0$, oder die Begebenheit unmöglich; alſo wird die Wahrſcheinlichkeit derjenigen Begebenheit, daſs wenigſtens eine aus Pik darunter iſt, $= 1 - 0 = 1$ oder Gewiſsheit ſein, wie auch ohne die Rechnung klar iſt.

§. 20.

Setzt man in der allgemeinen Formel $r = n$; ſo verwandelt ſie ſich in $\frac{(m-r)\ldots.(m-q+1)}{1.2\ldots.(q-r)} : \frac{m\ldots.(m-q+1)}{1.2\ldots.q}$

welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs alle ausgeſonderten Fälle ſich ereignen werden. (Man ſehe Kap. IV. §. 7.)

Zum Beiſpiel. 1. Im Zahlen-Lotto kauft jemand drei Nummern: um die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs ſie in der nächſten Ziehung herauskommen werden, ſetze man in der jetzt gefundenen Formel $m=90$, $q=5$, $r=3$; ſo verwandelt ſie ſich in $\frac{87 \cdot 86}{1 \cdot 2} : \frac{90 \ldots\ldots 86}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 5}$ *) $= \frac{1}{11748}$ welches die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt **)

2) * Kauft man ſechs Nummern in der zwanzigſten Leipziger Lotterie; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit daſs ſie in der nächſten Ziehung gewinnen werden,

$$\frac{q\,(q-1)\,(q-2)\,(q-3)\,(q-4)\,(q-5)}{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\,(m-5)};$$

Z. B. für die Ziehung der dritten Klaſſe iſt $m=14400$, $q=800$, alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=$

$$\frac{800 \cdot 799 \cdot 798 \cdot 797 \cdot 796 \cdot 795}{14400 \cdot 14399 \cdot 14398 \cdot 14397 \cdot 14396 \cdot 14395}.$$

3) * Für eine Nummer iſt die Wahrſcheinlichkeit daſs ſie in der nächſten Ziehung herauskommen wird $=\frac{q}{m}$. Für die erſte Klaſſe der Leipziger Lotterie iſt ſie

*) $= \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88}$ welches mit Kap. II. §. 6. übereinkommt.

Anm. des Ueberſ.

**) Die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit hievon iſt diejenige, daſs höchſtens zwei Nummern herauskommen werden, $= 1 - \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} = \frac{11747}{11748}$; oder nach Kap. II. §. 3. und 6, $= \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot (1-\frac{3}{88}) + \frac{5}{90} \cdot (1-\frac{4}{89}) \cdot \frac{3}{88} + (1-\frac{5}{90}) \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} + \frac{5}{90} \cdot (1-\frac{4}{89}) \cdot (1-\frac{3}{88}) + (1-\frac{5}{90}) \cdot \frac{4}{89} \cdot (1-\frac{3}{88}) + (1-\frac{5}{90}) \cdot (1-\frac{4}{89}) \cdot \frac{3}{88} + (1-\frac{5}{90}) \cdot (1-\frac{4}{89}) \cdot (1-\frac{3}{88})$ welches ebenfalls die vorige Zahl giebt; nur iſt bei dieſem Verfahren mühſam das Abzählen der einzelnen Fälle, wobei man ſich ſehr leicht verrechnen kann.

Anm. des Ueberſ.

$= \frac{800}{16000} = \frac{1}{20}$, Kap. IV. §. 4. Für das Zahlen-Lotto ist diese Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. Für zwei Nummern ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle beide herauskommen werden $= \frac{q(q-1)}{m(m-1)}$; also für die erste Klasse der zwanzigsten Leipziger Lotterie $= \frac{800 \cdot 799}{16000 \cdot 15999}$ $= \frac{1}{20} \cdot \frac{799}{15999}$, welches mit Kap. IV. §. 5. übereinkommt.

4)* Die Wahrscheinlichkeit, dass unter neun aus einem Piketspiel blindlings gezogenen Karten sich alle Pik befinden werden, ist $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{1}{1168700}$. Diejenige Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Pik, dass also höchstens 7 Pik sich darunter befinden werden, ist $1 - \frac{1}{1168700} = \frac{1168699}{1168700}$.

§. 21.

Wenn $n = q$ ist; so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-2q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)} : \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$.*)

*) Welches die Wahrscheinlichkeit ist, dass, wenn so viel Fälle ausgesondert worden, als Fälle sich ereignen sollen, just r von den ausgesonderten Fällen sich ereignen werden. Eben diese Wahrscheinlichkeit läst sich aber auch folgendergestalt ausdrüken:

$$\frac{q^2(q-1)^2(q-2)^2\ldots(q-r+1)^2}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-2q+r+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}.$$

Anm. d. Uebers.

§. 22. *

Beispiele. 1. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Lotto bei der nächſten Ziehung von fünf gekauften Nummern juſt drei herauskommen werden? Hier iſt $m=90$, $q=5$, $r=3$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{2975}{3662439} = \frac{1}{1231\frac{214}{2975}}.$$

2. Man wähle in einem Piketſpiel eine Farbe; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter acht blindlings herausgezogenen Karten ſich juſt fünf von dieſer Farbe befinden werden;

$$\frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}.$$

§. 23.

Wenn $r=q=n$; ſo verwandelt ſich die allgemeine Formel in

$$1 : \frac{m(m-1) \ldots \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots \ldots q} \text{ oder}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots q}{m \cdot (m-1) \ldots \ldots (m-q+1)}.$$

Zum Beiſpiel. 1) Es beſetze jemand im Lottoſpiel fünf Nummern; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſie insgeſammt bei der nächſten Ziehung herauskommen werden, wenn man in der eben gefundenen Formel $m=90$, $q=5$ ſetzt; es iſt alſo dieſe Wahrſcheinlichkeit $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268}$; Und $1 - \frac{1}{43949268}$ $= \frac{43949267}{43949268}$ wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs höchſtens vier davon herauskommen werden.

2)* Sollen aus einem Piketſpiel acht Karten gezogen werden, und alle aus Pik ſein; ſo iſt die Wahrſchein-

lichkeit dieser Begebenheit $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{32.31.30.29.28.27.26.25}$ $=\frac{1}{10518300}$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens sieben aus Pik darunter sind, $1-\frac{1}{10518300}$ $=\frac{10518299}{10518300}$.

§. 24.*

Wenn in der allgemeinen Formel $q=r$ ist; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, dass die herauskommenden alle von den ausgesonderten Fällen sind,

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}.$$

Hiernach wäre die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit §.15. Num. 3. $\frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$ wie am a. O.

§. 25.

Ist $q=r=1$; so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{n}{m}$, welches die Wahrscheinlichkeit ist, wenn ein einziger von den ausgesonderten Fällen sich ereignen soll.

§. 26.*

Zum Beispiel. Kauft man n Nummern in einer Lotterie, die aus m Nummern besteht; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim ersten Zuge just auf eine von den gekauften Nummern trift, $=\frac{n}{m}$.

1) Für die 20ste Leipziger Lotterie ist die Wahrscheinlichkeit, dass mein Loos in der ersten Klasse zu allererst herauskommt $\frac{1}{16000}$, und die dass es nicht zu-

erst herauskommt, $= 1 - \frac{1}{16000} = \frac{15999}{16000}$; die Wahrscheinlichkeit, daſs eins von meinen beiden Loosen in derselben zuerst herauskommen wird, ist $= \frac{2}{16000} = \frac{1}{8000}$; und so weiter, wenn ich überhaupt n Loose gekauft habe, die Wahrscheinlichkeit, daſs eins davon zu allererst herauskommen wird, $= \frac{n}{16000}$; Die Wahrscheinlichkeit, daſs mein Loos in der zweiten Klasse zuerst herauskommt, ist $= \frac{1}{15200}$, und wenn ich der Besitzer von zwei Loosen bin, daſs eins von denselben in der zweiten Klasse beim ersten Zuge herauskommen wird $= \frac{2}{15200} = \frac{1}{7600}$; und so ferner.

2) Hat man in der Leipziger Lotterie zwei Loose gekauft; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs beide hinter einander zu allererst herauskommen werden, aus §. 23, für die erste Klasse $= \frac{1 \,.\, 2}{16000 \,.\, 15999}$ [oder $\frac{2}{16000} \,.\, \frac{1}{15999}$; für die zweite Klasse $\frac{2}{15200} \,.\, \frac{1}{15199}$; überhaupt für n Loose der ersten Klasse

$$= \frac{n}{16000} \,.\, \frac{n-1}{15999} \,.\, \frac{n-2}{15998} \,.\,.\,.\,.\, \frac{1}{16000-n+1};$$

und allgemein für irgend eine Klasse:

$$\frac{n}{m} \,.\, \frac{n-1}{m-1} \,.\, \frac{n-2}{m-2} \,.\, \frac{n-3}{m-3} \,.\,.\,.\,.\, \frac{2}{m-n+2} \,.\, \frac{1}{m-n+1}.$$

3) Soll man aus einem Piketspiel blindlings eine Karte ziehen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs diese aus Pik oder Tref sein wird

$= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. (Man vergleiche §. 1)

4) Kauft man im Zahlen-Lotto 75 Nummern; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine von denselben sogleich beim ersten Zuge herauskommen wird $= \frac{75}{90} = \frac{15}{18} = \frac{1}{1\frac{1}{5}}$.

§. 27.

Aufgabe. *Wenn alles übrige bleibt wie in §. 14; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass **wenigstens** r Fälle von den n ausgesonderten Fällen sich ereignen werden.*

Auflösung. 1) Man setze nach und nach in dem Zähler am a. O. anstatt r alle ganze Zahlen von $n, n-1, \ldots$ bis $r+3$, $r+2$, $r+1$, r; so wird die Summe der auf diese Weise erhaltenen einzelnen Produkte der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein.

2) Der Nenner ist mit dem a. a. O. einerlei.

3) Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\Big\{ {}^{n}A . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-n)} +$$

$${}^{n}B . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-n+1)} +$$

$${}^{n}C . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q-1)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-n+2)} +$$

$${}^{n}D . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q-2)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-n+3)} + \ldots$$

$$+ {}^{n}[R+2] . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+3)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-r-2)}$$

$$+ {}^{n}[R+1] . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+2)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-r-1)}$$

$$+ {}^{n}R . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;(q-r)} \Big\} :$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-q+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;q}.\text{*)}\quad W.\ Z.\ F.$$

§. 28.*

Die allgemeine Formel im vorhergehenden §. 27. Num. 3 verwandelt sich für $n<q$ in folgende:

$$\frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}.\Big\{{}^nA+{}^nB.\frac{m-q}{q-n+1}+{}^nC.\frac{(m-q).(m-q-1)}{(q-n+1)(q-n+2)}$$

$$+{}^nD.\frac{(m-q)(m-q-1)(m-q-2)}{(q-n+1)(q-n+2)(q-n+3)}+\ldots\ldots$$

$$+{}^n[R+1].\frac{(m-q)\ldots\ldots(m-n-q+r+2)}{(q-n+1)\ldots\ldots(q-r-1)}$$

$$+{}^nR.\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{(q-n+1)(q-n+2)\ldots(q-r)}\Big\}(=\odot);$$ und für

$n>q$, in $$\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}.\Big\{{}^qA+{}^qB.\frac{m-n}{n-q+1}$$

$$+{}^qC.\frac{(m-n)(m-n-1)}{(n-q+1)(n-q+2)}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+{}^qR.\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+1)}{(n-q+1)\ldots\ldots\ldots(n-r)}\Big\}(=\mathfrak{D}).$$

*) Wo die Buchstaben ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, ${}^nD$, ${}^nE$, ${}^nF$, ... ${}^n[R+2]$, ${}^n[R+1]$, ${}^nR$, den ersten $(=1)$ 2ten $(=n)$ 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ... $(r+3)$ten, $(r+2)$ten, $(r+1)$ten Binomialkoëfficienten der Potenz n andeuten. Z. B. ${}^nR$ bedeutet so viel als $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots r}$, desgleichen ${}^n[R+1]$ so viel als

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-(r+1)+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots\ldots(r+1)}$$ oder

$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r)}{1\;.\;2\ldots\ldots(r+1)}$; ${}^nC$ so viel als $\frac{n(n-1)}{1\;.\;2}$; und so weiter. *Anm. des Uebers.*

Beide Formeln wollen wir nun auf Beispiele anwenden.

§. 29.

Beispiel 1. Aus einem Piketspiel von 32 Karten seien zehn Blätter blindlings und ohne zu wählen herauszuziehen erlaubt: wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs sich unter diesen zehn herausgezogenen wenigstens fünf Koeur befinden werden? Hier ist $m = 32$, $q = 10$, $n = 8$, $r = 5$, folglich die Reihe (⊙)

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} \cdot \left(1 + 8 \cdot \frac{22}{3} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{22 \cdot 21}{3 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right) = \frac{5857}{140244}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Also wird diejenige Wahrscheinlichkeit sein, daſs nicht wenigstens fünf Koeur, das heiſst, daſs höchstens vier Koeur darunter sind, $= 1 - \frac{5857}{140244} = \frac{134387}{140244}$.

§. 30.

Beispiel 2. Man wählt 75 von den 90 Lotto-Nummern, und verlangt die Gröſse der Wahrscheinlichkeit zu wissen, daſs in der nächsten Ziehung wenigstens drei von den ausgewählten Nummern zum Vorschein kommen werden. Hier ist $m = 90$, $n = 75$, $q = 5$, $r = 3$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit (☽) $\frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$.

$$\left(1 + 5 \cdot \frac{15}{71} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15 \cdot 14}{71 \cdot 72}\right) = \frac{14193755}{14649756}.$$

§. 31.*

Für zwei Loose in der letzten Klasse der 20sten Leipziger Lotterie wird die Wahrscheinlichkeit daſs wenigstens eins davon gewinnt, gefunden, wenn man in der allgemeinen Formel (⊙ §. 28.) $m = 12800$, $q = 5234$, $n = 2$ und $r = 1$ setzt; also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{5234 \cdot 5233}{12800 \cdot 12799} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{12800 - 5234}{5234 - 1}\right) = \frac{10659041}{16382720}$$ wie in §. 19. Num. 3. gefunden worden ist.

Auch erhält man die Wahrscheinlichkeit, daſs wenigstens eine von 75 gekauften Nummern des Lotto in der nächsten Ziehung herauskommen werde, wenn man in der allgemeinen Formel ☽ §. 28. $m = 90$, $n = 75$, $q = 5$, und $r = 1$ setzt, $=$

$$\frac{75 \ldots 71}{90 \ldots 86} \cdot \left\{1 + 5 \cdot \frac{15}{71} + \frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{15.14}{71.72} + \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{15.14.13}{71.72.73} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} \cdot \frac{15 \ldots 12}{71 \ldots 74}\right\}$$

$= \frac{1331705}{1331796}$. Man vergleiche §. 19. Num. 1.

Setzt man ferner in der allgemeinen Formel ☉, $m = 32$, $q = 9$, $n = 8$, $r = 1$; so verwandelt sie sich in

$$\frac{9 \ldots 2}{32 \ldots 25} \cdot \left(1 + 8 \cdot \frac{23}{2} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{23 \cdot 22}{2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right.$$
$$+ \frac{8 \ldots 5}{1 \ldots 4} \cdot \frac{23 \ldots 20}{2 \ldots 5} + \frac{8 \ldots 4}{1 \ldots 5} \cdot \frac{23 \ldots 19}{2 \ldots 6} + \frac{8 \ldots 3}{1 \ldots 6} \cdot$$
$$\left.\frac{23 \ldots 18}{2 \ldots 7} + \frac{8 \ldots 2}{1 \ldots 7} \cdot \frac{23 \ldots 17}{2 \ldots 8}\right) = \frac{1671331}{1753050}$$ welches mit §. 19. Num. 4. übereinkommt.

§. 32.*

Wenn in den allgemeinen Formeln (☉, ☾ §. 28) $n = q$ gesetzt wird; so verwandeln sie sich in

$$\frac{n(n-1) \ldots 2 \cdot 1}{m(m-1) \ldots (m-n+1)} \cdot \left({}^nA + {}^nB \cdot \frac{m-n}{1} + {}^nC \frac{(m-n)(m-n-1)}{1 \cdot 2}\right.$$
$$+ {}^nD \frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$\left. + \ldots + {}^nR \cdot \frac{(m-n)(m-n-1) \ldots (m-2n+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (n-r)}\right)$$

Zum Beiſpiel. Man beſetzt im Lotto 5 Nummern; Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens drei dieſer Nummern herauskommen werden? Hier iſt $m=90$, n oder $q=5$, $r=3$, alſo die verlangte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}\cdot\left(1+5\cdot\frac{85}{1}+10\cdot\frac{85\cdot84}{1\cdot2}\right)=\frac{6021}{7324878}.$$

Und diejenige Wahrſcheinlichkeit daſs höchſtens zwei von dieſen Nummern gewinnen, wird ſein

$$1-\frac{6021}{7324878}=\frac{7318857}{7324878}.$$

§. 33.*

Man ſetze in der Formel des vorhergehenden §. 32 $r=1$; ſo bekömmt man den Ausdruck:

$$\frac{n\ldots\ldots2\cdot1}{m\ldots(m-n+1)}\cdot\left({}^nA+{}^nB(m-n)+{}^nC\frac{(m-n)(m-n-1)}{1\;.\;2}\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}^nB\cdot\frac{(m-n)\ldots(m-2n+2)}{1\cdot2\ldots(n-1)}\right)$$

welcher die Wahrſcheinlichkeit anzeigt, daſs von n ausgeſonderten Fällen wenigſtens einer unter den n herauskommenden iſt. Folglich iſt diejenige Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich kein einziger Fall darunter befinden wird =

$$1-\frac{n(n-1)\ldots1}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}\cdot\left({}^nA+{}^nB(m-n)+{}^nC\frac{(m-n(m-n-1)}{1\;.\;2}\right.$$
$$\left.+\ldots+{}^nB\frac{(m-n)\ldots(m-(n-1)\,2)}{1\ldots(n-1)}\right).$$

Zum Beiſpiel. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Lotto bei der nächſten Ziehung von fünf gewählten Nummern wenigſtens eine herauskommt?

Man ſetze $m=90$ und $n=5$, ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}\cdot\left(1+5\cdot85+10\cdot\frac{85\cdot84}{1\;.\;2}+10\cdot\frac{85\cdot84\cdot83}{1\;.\;2\;.\;3}\right.$$
$$+5\cdot$$

$$+ 5 \cdot \frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\Big) = \frac{1238639}{4883252}.$$

Und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich diejenige, daſs keine Nummer herauskommt, iſt = $1 - \frac{1238639}{4883252}$ oder $\frac{3644613}{4883252}$; welche die allgemeine Formel §. 21. unmittelbar giebt, wenn man darinnen $r = 0$ ſetzt. Dieſe Formel verwandelt ſich alsdann in

$$\frac{(m-n)(m-n-1) \ldots (m-2n+1)}{m(m-1) \ldots (m-n+1)},$$

und giebt, die vorigen Werthe anſtatt m und n geſetzt:

$$\frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{3644613}{4883252}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 34.*

Iſt $r = n = q$, ſo verwandelt ſich die allgemeine Formel in $\frac{n(n-1) \ldots \ldots 2 \cdot 1}{m(m-1) \ldots (m-n+1)}$, welche mit der in §. 23. übereinkommt.

Iſt $r = n = q = 1$; ſo bekömmt man $\frac{1}{m}$.

Für $r = q$, verwandelt ſich die Formel ☽ (§. 28.) in

$$\frac{n(n-1) \ldots (n-q+1)}{m(m-1) \ldots (m-q+1)} \text{ S. §. 24.}$$

Alſo für $r = q = 1$, in $\frac{n}{m}$.

Iſt $n = r$, ſo giebt ⊙

$$\frac{q(q-1) \ldots \ldots (q-n+1)}{m(m-1) \ldots (m-n+1)} \text{ (§. 20.).}$$

Setzt man in ⊙ und ☽, $r = 1$; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs von n ausgeſonderten Fällen wenigſtens ein Fall unter q herausgekommenen iſt. Zieht man ſolche von der Einheit ab, ſo bekömmt man die

Wahrscheinlichkeit, daſs von den n ausgesonderten Fällen keiner unter den q herauskommenden sich befindet. Man vergleiche §. 18. und 17.

Die Wahrscheinlichkeit suchen, daſs sich wenigstens $0 (= r)$ von n ausgesonderten Fällen unter q herausgekommenen befinden, heiſst *Gewiſsheit* suchen. Addirt man nämlich zu der Formel in §. 18. die in §. 17, so bekömmt man 1.

§. 35.

Aufgabe. *Wenn alles übrige bleibt wie in §. 14; die Wahrscheinlichkeit zu finden, daſs von den n ausgesonderten Fällen höchstens r Fälle sich ereignen werden.*

Auflösung. 1) Man setze in dem Zähler am a. O. anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 0, 1, 2, ... bis $r-2$, $r-1$, r; so wird die Summe der solchergestalt erhaltenen Produkte der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein.

2) Der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist wie am a. O. $= \frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots q}$.

3) Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\Big({}^{n}A . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots q} +$$

$${}^{n}B . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+2)}{1 \,.\, 2 \ldots (q-1)} +$$

$${}^{n}C . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+3)}{1 \,.\, 2 \ldots (q-2)} +$$

$$\ldots + {}^{n}[R-1] . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r)}{1 \,.\, 2 \ldots (q-r+1)} +$$

$${}^{n}R . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots (q-r)} \Big) :$$

$$\frac{m.(m-1)\ldots.(m-q+1)}{1\ .\ 2\ \ldots.\ q};\ ^{*)}\ W.\ Z.\ F.$$

§. 36.

Beispiel 1. Aus einem Piketspiel von 32 Karten ziehe man blindlings und ohne zu wählen 10 Blätter: Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs darunter höchstens vier Koeur sich befinden?

Man setze in der allgemeinen Formel des vorigen §. $m=32$, $q=10$, $n=8$, $r=4$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{22.21.20.19.18.17.16.15}{32.31.30.29.28.27.26.25}.\left(1+8.\frac{10}{15}+\frac{8.7}{1.2}.\frac{10.9}{15.16}+\frac{8.7.6}{1.2.3}.\frac{10.9.8}{15.16.17}+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{10.9.8.7}{15.16.17.18}\right)=\frac{134387}{140244}.$$

welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist. (Man sehe §. 29)

§. 37.

Beispiel 2. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs von 75 besetzten Lotto-Nummern in der nächsten Ziehung höchstens zwei herauskommen werden?

*) Welches so viel ist als die Reihe

$$\left({}^{n}A+{}^{n}B.\frac{q}{m-n-q+1}+{}^{n}C.\frac{q\ (q-1)}{(m-n-q+1).(m-n-q+2)}+\ldots\right.$$

$$+{}^{n}[R-1]'.\frac{q\ \ldots.\ (q-r+2)}{(m-n-q+1)\ldots.(m-n-q+r-1)}$$

$$\left.+{}^{n}R.\frac{q\ \ldots.\ (q-r+1)}{(m-n-q+1)\ \ldots\ (m-n-q+r)}\right)$$

multiplicirt in

$$\frac{(m-q)\ (m-q-1)\ \ldots\ldots\ (m-n-q+1)}{m\ .\ (m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}$$

oder in $\frac{(m-n).(m-n-1)\ \ldots.\ (m-n-q+1)}{m\ (m-1)\ \ldots\ (m-q+1)}$

je nachdem $n <$ *oder* $> q$ *ist.* *Anm. des Uebers.*

Hier ist $m=90$, $q=5$, $n=75$, $r=2$, also verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \cdot \left(1+75 \cdot \frac{5}{11} + \frac{75 \cdot 74}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 12}\right) = \frac{456001}{14649756},$$

welches die verlangte Wahrscheinlichkeit ist. (Man vergleiche §. 30).

§. 38.*

Man kauft zwei Loose in der 20sten Leipziger Lotterie, und verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, dass höchstens eins davon in der ersten Klasse herauskommt.

In diesem Falle ist $m=16000$, $q=800$, $n=2$, $r=1$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{15200 \cdot 15199}{16000 \cdot 15999} \cdot \left(1+2 \cdot \frac{800}{15199}\right) = \frac{319181}{319980},$$

wie in Kap. IV. §. 5.

Für die zweite Klasse ist $m=15200$, das übrige bleibt, also die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Nummer herauskommt:

$$\frac{14400 \cdot 14399}{15200 \cdot 15199} \cdot \left(1+2 \cdot \frac{800}{14399}\right) = \frac{287982}{288781},$$

wie am a. O. u. s. f.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Lotto von 75 gewählten Nummern in der nächsten Ziehung höchstens vier herauskommen werden, ist

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \cdot \left(1+75 \cdot \frac{5}{11} + \frac{75 \cdot 74}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 12} + \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 12 \cdot 13} + \frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}\right) = \frac{1482771}{2441626}$$

Man vergleiche §. 15. Beispiel 3.

Aus einem Piketspiel werden blindlings neun Blätter herauszunehmen erlaubt: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter höchstens sieben Koeur befinden?

Hier ist $m=32$, $q=9$, $n=8$, $r=7$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{23\ldots16}{32\ldots25}\cdot\left(1+8\cdot\frac{9}{16}+\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{9.8}{16.17}+\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{9.8.7}{16.17.18}\right.$$
$$+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{9.8.7.6}{16.17.18.19}+\frac{8\ldots\ldots4}{1.2\ldots\ldots5}\cdot\frac{9\ldots5}{16\ldots20}+\frac{8\ldots3}{1.2\ldots6}\cdot$$
$$\left.\frac{9\ldots4}{16\ldots21}+\frac{8\ldots2}{1.2\ldots7}\cdot\frac{9\ldots3}{16\ldots22}\right)=\frac{1168699}{1168700},$$ wie in §. 20. Num. 4.

§. 39.*

Setzt man in der allgemeinen Formel §. 35, $r=1$; so verwandelt sie sich in

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}\left(1+\frac{n\,q}{m-n-q+1}\right)$$

oder $$\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-n-q+1)}{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}\left(1+\frac{n\,q}{m-n-q+1}\right),$$

je nachdem $n >$ oder $< q$ ist.

Zum Beispiel. Aus einem Piketspiel werden 4 Blätter blindlings herauszuziehen erlaubt; wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs darunter höchstens ein Koeurblatt ist?

Man setze in der erstern Formel $m=32$, $q=4$, $n=8$; so bekömmt man die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{24.23.22.21}{32.31.30.29}\cdot\left(1+\frac{4.8}{21}\right)=\frac{13409}{17980}.$$ Also wird diejenige Wahrscheinlichkeit sein, daſs wenigstens zwei Koeur darunter sind, $=1-\frac{13409}{17980}=\frac{4571}{17980}$, wie man sie auch aus §. 28. D) findet, wenn man $m=32$, $q=4$, $n=8$ und $r=2$ setzt.

§. 40.*

Wenn man in der allgemeinen Formel $n=q$ setzt; so erhält man

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-2n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}\cdot\Big({}^nA+{}^nB.\frac{n}{m-2n+1}$$

$$+{}^nC.\frac{n(n-1)}{(m-2n+1)(m-2n+2)}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots+{}^nR.\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(m-2n+1)\ldots(m-2n+r)}\Big)$$

welches die Wahrscheinlichkeit anzeigt, daſs von n ausgesonderten Fällen unter eben ſo viel herauskommenden höchſtens r vorhanden ſind.

Zum Beiſpiel. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs in der nächſten Ziehung des Lotto von fünf Nummern höchſtens zwei gewinnen werden, iſt

$$\frac{85\cdot84\cdot83\cdot82\cdot81}{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}\cdot\Big(1+5.\frac{5}{81}+\frac{5\cdot4}{1,2}\cdot\frac{5\cdot4}{81.82}\Big)=\frac{7318857}{7324878},$$

wie in §. 32.

§. 41.*

Für $n=q$ und $r=1$, bekömmt man

$$\frac{(m-n)\ldots(m-2n+1)}{m\ldots(m-n+1)}\cdot\Big(1+\frac{n^2}{m-2n+1}\Big)$$

welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs ſich höchſtens ein Fall von n ausgeſonderten Fällen unter eben ſo viel gezogenen befinden wird. Folglich iſt

$$1-\frac{(m-n)\ldots(m-2n+1)}{m\ldots(m-n+1)}\cdot\Big(1+\frac{n^2}{m-2n+1}\Big)$$

die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich wenigſtens zwei Fälle von n ausgeſonderten Fällen unter eben ſo viel gezogenen befinden werden.

Zum Beiſpiel. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Lottoſpiel höchſtens eine von fünf gewählten Nummern gewinnen wird, iſt

$$\frac{85\ldots81}{90\ldots86}\cdot\Big(1+\frac{5^2}{81}\Big)=\frac{21462721}{21974634};$$ und die, daſs da-

von wenigstens zwei gewinnen werden

$$1-\frac{21462721}{21974634}=\frac{511913}{21974634}.$$

§. 42.*

Setzt man in der allgemeinen Formel §. 35, $q=n=r$, oder in §. 40, $r=n$; so bekömmt man $1=$

$$\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+1)}{m\ldots.(m-n+1)}+n^2.\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+2)}{m\ldots.(m-n+1)}$$

$$+\frac{n^2.(n-1)^2}{1\;.\;2}.\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+3)}{m\ldots.(m-n+1)}+$$

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1\;.\;2\;.\;3}.\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+4)}{m\ldots.(m-n+1)}+\text{etc.}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2\ldots.(n-r+1)^2}{1\;.\;2\ldots.r}.\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+r+1)}{m\ldots.(m-n+1)}+\text{etc.}$$

$$+\frac{n.(n-1)\ldots.2.1}{m\ldots.(m-n+1)}.$$ Dieser endlichen Reihe einzelne Glieder zeigen die Wahrscheinlichkeit an, dass von n ausgesonderten bei eben so viel herausgekommenen Fällen, just 0, 1, 2, 3....r, ...n sich ereignen werden. Man vergleiche §. 33, 21, 23.

§. 43.*

In §. 35 $n=q=r=1$ oder $n=1$ in §. 41, 42 gesetzt, erhält man $\frac{m-1}{m}.\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=1$. Ferner in §. 35. $r=0$ gesetzt, verwandelt sich die allgemeine Formel in die §. 17.

Kapitel VI.

Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle hinter einander in einer bestimmten Ordnung ereignen.

§ 1.

Wir setzen im gegenwärtigen Kapitel wiederum voraus, dafs von der Anzahl m aller Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen, sich q Fälle hinter einander ereignen sollen, dafs man aus der ganzen Anzahl von Fällen eine Parthie aussondert, und die Zahl der ausgesonderten Fälle n ist.

Allein es sind hier folgende zwei verschiedene Fälle möglich.

Entweder die Begebenheit hängt von der Ereignifs der Zahl r von den ausgesonderten Fällen ab, es sei die Ordnung, in welcher sie sich ereignen, welche sie wolle. Für diesen Fall haben wir in dem vorhergehenden Kapitel die Wahrscheinlichkeit der bestimmten Begebenheit nach einer allgemeinen Methode finden gelehrt.

Oder es ist möglich, dafs die Begebenheit in der Ereignifs der Anzahl r von den ausgesonderten Fällen nach einer bestimmten Ordnung bestehet.

Zum Beispiel. Wenn man von den 32 Karten eines Piketspiels vier in einer bestimmten Ordnung nennet, dergleichen folgende ist:

Pik-As die dritte, Tref-König die fünfte,

Koeur-Dame die siebente, Kareau-Bube die zehnte, wenn man hierauf blindlings zehn aus den 32 gegebenen Karten hinter einander je eine auf einmal herausziehet, und verlanget, dafs unter den zehn gezogenen Karten wenigstens zwei von denjenigen, die man genannt hat, an der ihnen angewiesenen Stelle erscheinen sollen; das ist, dafs sein soll:

Pik-As die dritte, und Tref-König die fünfte; oder
Pik-As die dritte, und Koeur-Dame die ſiebente; oder
Pik-As die dritte, und Kareau-Bube die 10te; oder
Tref-König die fünfte, und Koeur-Dame die 7te; oder
Tref-König die 5te, und Kareau-Bube die 10te; oder
Koeur-Dame die 7te, und Kareau-Bube die 10te,

ſo ſoll man die Wahrſcheinlichkeit der verlangten Begebenheit unter den genannten Vorausſetzungen finden; und dieſes wird der Innhalt des gegenwärtigen Kapitels ſein.

§. 2.

Lehrsatz. *Es ſei m die Anzahl der Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen: ich ſage, die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten q von dieſen Fällen hinter einander je einer auf einmal ſich ereignen können, iſt* $m.(m-1)\ldots.(m-q+1)$.

Beweis. Werden die gegebenen Fälle durch die Buchſtaben a, b, c, d, f, etc. an der Zahl m angedeutet; ſo iſt offenbar, daſs die gleich möglichen Arten, auf welche ein einziger von dieſen Fällen ſich ereignen kann, durch die Glieder folgender Tafel

$a,\ b,\ c,\ d,\ f,$ —

dargeſtellet werden, deren Anzahl $= m$ iſt.

Die Anzahl der Arten, auf welche zwei von den gegebenen Fällen ſich ereignen können, iſt die Zahl der Glieder folgender Tafel:

ab	ba	ca	da	fa	—
ac	bc	cb	db	fb	—
ad	bd	cd	dc	fc	—
af	bf	cf	df	fd	—
—	—	—	—	—	—

Die Anzahl der Buchſtaben in dieſer Tafel iſt $= m$, in jeder horizontalen Reihe ſind m Glieder, und zu jedem Buchſtaben gehört eine ſenkrechte Reihe von $m-1$ Gliedern.

Weil also $m-1$ horizontale Reihen, jede von m Gliedern, vorhanden sind; so ist die Anzahl der Glieder $= m\,(m-1)$.

Die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche drei von den m gegebenen Fällen sich zutragen können, ist die Zahl der Glieder folgender Tafel:

abc	*bac*	*cab*	*dab*	*fab*	—
abd	*bad*	*cad*	*dac*	*fac*	—
abf	*baf*	*caf*	*daf*	*fad*	—
—	—	—	—	—	—
acb	*bca*	*cba*	*dba*	*fba*	—
acd	*bcd*	*cbd*	*dbc*	*fbc*	—
acf	*bcf*	*cbf*	*dbf*	*fbd*	—
—	—	—	—	—	—
adb	*bda*	*cda*	*dca*	*fca*	—
adc	*bdc*	*cdb*	*dcb*	*fcb*	—
adf	*bdf*	*cdf*	*dcf*	*fcd*	—
—	—	—	—	—	—
afb	*bfa*	*cfa*	*dfa*	*fda*	—
afc	*bfc*	*cfb*	*dfb*	*fdb*	—
afd	*bfd*	*cfd*	*dfc*	*fdc*	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—

in welcher die Zahl der Buchstaben m ist, und wo in die Augen fällt, dass die Zahl der Glieder $m(m-1)(m-2)$ ist. Und so weiter.

*Nämlich zu jedem Gliede der zweiten Tafel kommt noch ein dritter Buchstabe hinzu, deren es $m-2$ giebt, wodurch demnach aus jedem Gliede der zweiten Tafel $m-2$ neue Glieder, jedes von drei Buchstaben, entspringen. Da nun die zweite Tafel aus $m\,(m-1)$ Gliedern besteht, so ist die Anzahl der Glieder in der dritten Tafel $= m\,(m-1).(m-2)$.

*Hieraus erhellet, daſs die Anzahl der Arten, auf welche vier von m gegebenen Fällen ſich ereignen können, ſein wird $= m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)$. Denn zu jedem Gliede der dritten Tafel kommt noch ein vierter Buchſtabe hinzu, deren es $m-3$ giebt, wodurch alſo aus jedem Gliede $m-3$ neue Glieder, jedes von vier Buchſtaben, entſpringen. Und ſo weiter.

*Iſt überhaupt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche eine Anzahl $q-1$ von m gegebenen Fällen ſich hinter einander, je ein Fall auf einmal, ereignen kann, $= m\ (m-1)\ (m-2) \ldots (m-q+2)$; ſo iſt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche die Zahl q von m gegebenen Fällen ſich hinter einander, je einer auf einmal, ereignen kann, $m\ (m-1)\ (m-2) \ldots (m-q+2)\ (m-q+1)$. Nämlich jedes Glied derjenigen Tafel, welche die Anzahl der Arten angiebt, auf welche $q-1$ von m Fällen ſich ereignen können, beſteht aus $q-1$ Buchſtaben, ſo daſs in jedem Gliede erwähnter Tafel $m-q+1$ Buchſtaben von der Menge m aller nicht vorhanden ſind. Wird nun die nächſt höhere Tafel aus ihr gemacht; ſo kann von den übrig gebliebenen $m-q+1$ Buchſtaben, je einer auf einmal, zu den $q-1$ Buchſtaben der vorhergehenden Tafel hinzugefügt werden, wodurch aus jedem Gliede der vorhergehenden Tafel $m-q+1$ Glieder entſtehen, die zur nächſt höhern Tafel gehören, daſs alſo die nächſt höhere Tafel $m \cdot (m-1) \ldots (m-q+1)$ Glieder bekömmt.

*Aber für $q-1=3$ iſt die Zahl $m\ (m-1)\ (m-2)$, wie in den berechneten Fällen; folglich iſt die Anzahl der Arten, auf welche vier von m gegebenen Fällen ſich auf die vorgeſchriebene Art ereignen können, $= m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)$. Und ſo weiter.

§. 3.

Beiſpiel. Von den 90 Nummern des Lottoſpiels werden in der nächſten Ziehung deſſelben fünf Num-

mern hinter einander, je eine auf einmal, gezogen: um zu erfahren, auf wie viel Arten solches möglich sei, oder welches einerlei ist, wie viel es bestimmte gleich mögliche Quinen gebe, setze man in der Formel $m \ldots (m-q+1)$, $m = 90$, $q = 5$, wodurch sie sich in $90 \ldots 86 = 5\,273\,912\,160$ verwandelt, welches die gesuchte Zahl ist. Eben so wird die Menge der bestimmten Amben, $m = 90$, $q = 2$ gesetzt, $= 90 \cdot 89 = 8010$; die Menge der bestimmten Ternen $= 90 \cdot 89 \cdot 88 = 704\,880$; und so weiter.

§. 4.

Zusatz. Wenn $q = m$ ist, so verwandelt sich der allgemeine Ausdruk $m \ldots (m-q+1)$ in $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$, welches das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis m ist, und so viel sagen will, dass die gegebenen m Fälle hinter einander, je einer auf einmal, auf $1 \cdot 2 \ldots m$ Arten sich ereignen können. So können alle 24 Buchstaben des Alphabets hinter einander jeder einmal genannt, oder auf $1 \cdot 2 \ldots 24 = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$ Arten in einer Reihe aneinander gesetzt werden.

§. 5.*

Aufgabe. *Es werden drei Nummern im Lotto, z. B. 6, 20, 84, zu einer bestimmten Terne also besetzt, dass 6 die erste, 84 die dritte, und 20 die letzte sein soll, welche herauskommt. Man fragt, auf wie viel gleich mögliche Arten just eine von diesen gewählten Nummern in der nächsten Ziehung herauskommen kann, doch so, dass keine derselben an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein komme, das ist, dass die Nummer 6, wenn sie herauskommt, nicht die erste Stelle, die Nummer 84, wenn sie herauskommt, nicht die dritte, und endlich 20 nicht die fünfte oder letzte Stelle in der Ordnung der Herausziehung haben werde.*

Auflösung. Die Zahl 6 kann die erste, zweite, dritte, vierte oder fünfte Stelle in der Ordnung der Her-

ausziehung einnehmen, alſo iſt für Nummer 6 die Anzahl aller möglichen Stellen, die ſie bei der Ziehung einnehmen kann, ſie mag an ihrem angewieſenen Orte, oder nicht an demſelben erſcheinen, $= 5$.

Da aber, wenn 6 die erſte Stelle einnimmt, ſie nach der Vorausſetzung an ihrem Orte erſcheinet; ſo wird $5 - 1$ oder 4 die Anzahl der Arten ſein, auf welche die genannte Nummer anders als an ihrem angewieſenen Orte zum Vorſchein kommen kann.

Eben dieſes, was jetzt von Nummer 6 geſagt worden, gilt aber auch von den beiden übrigen Nummern 20 und 84. Folglich erhellet, daſs die Anzahl der Arten, auf welche nur eine von den gewählten Nummern ſich ereignen kann, ſo, daſs ſie nicht die ihr vorgeſchriebene Stelle einnehmen wird, $= 3 \cdot 4$ oder 12 iſt.

Aber zu einer jeden von dieſen gleich möglichen Arten können ſich $5 - 1$ das iſt 4 von den $90 - 3$ das iſt 87 nicht ausgewählten Nummern, in den $5 - 1$ das iſt 4 noch übrigen Plätzen, auf ſo viel Arten ereignen, als durch die Zahl (§. 2)

$$87 \ldots (87 - 4 + 1) = 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 = 53\,421\,480$$

angedeutet werden.

Folglich iſt im gegenwärtigen Exempel die geſuchte Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche nur eine von den beſetzten Nummern dergeſtalt herauskommen wird, daſs ſie nicht an der ihr angewieſenen Stelle erſcheinet,

$$= 12 \cdot 53\,421\,480 = 641\,057\,760. \quad \textit{W. Z. F.}$$

§. 6.*

Aufgabe. *Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich die im vorigen §. 5. beſtimmte Begebenheit zutragen werde?*

Auflösung. Der Zähler iſt $= 641057760$, und der Nenner $= 5273912160$ (§. 3.), folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{641057760}{5273912160}$.

§. 7.

Die Frage wäre alſo allgemein folgende:

Aufgabe. *Aus der Anzahl aller Fälle, = m, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, werde eine Parthie ausgeſondert, und die Anzahl dieſer ausgeſonderten Fälle ſei n; man nenne die ausgeſonderten Fälle hinter einander, je einen auf einmal, in einer beſtimmten Ordnung: zum Beiſpiel, der Fall a der erſte, b der zweite, c der dritte, u.ſ.f.; von den m gegebenen Fällen mögen ſich q hinter einander, je einer auf einmal, ereignen. Man fragt, auf wie viel gleich mögliche Arten ſich juſt einer von den ausgeſonderten Fällen ereignen kann, ſo, daſs keiner davon an der ihm angewieſenen Stelle erſcheinet.*

Auflösung. Der Fall *a* kann eine von den vorausgeſetzten *q* Stellen, auf *q* gleich mögliche Arten einnehmen, welche durch die Glieder der folgenden Tafel angezeigt werden:

a	*	*	*	*
*	*a*	*	*	*
*	*	*a*	*	*
*	*	*	*a*	*
*	*	*	*	*a*

in welcher man vorausſetzt, daſs *q*, die Anzahl der Plätze, 5 iſt, wo die Sternchen (*) die Stellen für die nicht ausgewählten Fälle anzeigen, und aus welcher man erſiehet, daſs, wenn man auch eine andere Zahl als 5 für die Anzahl der Stellen angenommen hätte, die Anzahl der Glieder überhaupt *q* geweſen ſein würde.

Allein, um diejenige Zahl zu erhalten, welche anzeigt, auf wie viel Arten es möglich iſt, daſs der Fall *a* ſich nicht an ſeinem Orte ereignet, muſs man von der Anzahl der Glieder obiger Tafel, dasjenige Glied abrechnen, wo *a* an ſeiner Stelle ſich befindet. Folglich deutet $q - 1$ an, auf wie viel Arten der Fall *a* ſich anders als an ſeinem Orte ereignen kann.

Was jetzt von dem Falle a behauptet worden ist, kann auf einen jeden der übrigen ausgewählten Fälle b, c, d, etc. deren an der Zahl n sind, angewendet werden. Hieraus siehet man, dass die Anzahl der Arten, auf welche ein einziger von den ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, so dass er nicht an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt, $= n.(q-1)$ ist.

Aber zu einer jeden von diesen Arten kann sich eine Anzahl $q-1$ von den $m-n$ nicht ausgesonderten Fällen, in den $q-1$ übrigen Stellen auf so viel Arten ereignen, als durch $(m-n) \ldots . (m-n-q+2)$ ausgedrükt wird (§. 2.).

Folglich ist in der gegenwärtigen Aufgabe die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche nur ein einziger von den ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, so dass dieser nicht an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt, $= n.(q-1).(m-n) \ldots .$

$$(m-n-q+2) \text{ oder } \frac{n}{1}.\binom{1.q}{-1}.(m-n).(m-n-1) \ldots .$$

$(m-n-q+2)$. *W. Z. F.*

§. 8.*

Beispiel 1. Aus einer deutschen Karte von 32 Blättern wähle man sechs Blätter in nachfolgender Ordnung:

Eichel-Daus, die erste,
Schellen-Daus, die zweite,
Grüner König, die vierte,
Rother König, die fünfte,
Rother Unter, die siebente,
Grüner Unter, die achte,

und ziehe alsdann aus dieser Karte blindlings acht Blätter hinter einander nur eins auf einmal heraus. So erhält man die Menge der Arten, dass just eins von den genannten Blättern unter den gezogenen, aber dasselbe nicht an der ihm angewiesenen Stelle sich befindet, wenn man in der vorhin (§. 7.) gefundenen allge-

meinen Formel, $m = 32$, $q = 8$, und $n = 6$ setzt. Also ist die gesuchte Zahl: 6.7.26.25.24.23.22.21.20.

§. 9.*

Beispiel 2. Man nenne vier Blätter aus einer Piketkarte in folgender bestimmten Ordnung:

Pik-As, die dritte,
Tref-König, die fünfte,
Koeur-Dame, die siebente,
Kareau-Bube, die zehnte,

und ziehe alsdann aus den 32 gegebenen Karten zehn Stük blindlings und ohne zu wählen hinter einander heraus; so ist die Menge der gleich möglichen Arten, dass just ein Blatt von den genannten vier Blättern unter den gezogenen sein, aber nicht an seiner Stelle sich befinden wird, = 4.9.28.27.26....20.

§. 10.*

Aufgabe. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den (§. 7.) gemachten Voraussetzungen just einer von den n ausgesonderten Fällen, aber nicht an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird?*

Auflösung. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist $= n\,(q-1).(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+2)$ (§. 7.) der Nenner $= m\,(m-1)\ldots(m-q+1)$ (§. 2.) Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{n\,(q-1).(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+2)}{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)}$$

oder $\frac{n}{1}.\left(\begin{matrix}1.q\\-1\end{matrix}\right).\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+2)}{m\ldots\ldots(m-q+1)}$.

So ist für das erste Beispiel (§. 8.) die Wahrscheinlichkeit, dass nur eins von den ausgesonderten Blättern, aber nicht an der ihm angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird

$$= \frac{6.7.26\ldots 20}{32.31\ldots 25} = \frac{6.7.24\ldots 20}{32\ldots\ldots 27}.$$

Und

Und für das zweite Beispiel (§.9.) ist eben diese Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 28 \ldots 20}{32 \ldots 23} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}.$$

§. 11. *

Zusatz. Setzt man in der allgemeinen Formel (§.10.) $n = q$; so verwandelt sie sich in

$$\frac{n(n-1).(m-n)(m-n-1) \ldots (m-2n+2)}{m(m-1) \ldots (m-n+1)}.$$

Z.B. Aus einem Haufen von zehn verschiedenen Karten soll man blindlings hinter einander acht Karten je eine auf einmal herausziehen. Nun ist einem jeden Blatte von acht aus diesen zehn gegebenen Karten ausgesonderten Blättern eine bestimmte Stelle angewiesen worden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen Karten nur eine von den acht ausgesonderten, aber nicht an der ihr angewiesenen Stelle sein wird?

Hier ist $m = 10$, $n = 8$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -4}{10 \cdot 9 \ldots 3} = 0$; dieses zeigt an, dass die bestimmte Begebenheit unmöglich ist.

Wenn man $n = 1$ setzt; so verwandelt sich die allgemeine Formel (§.10) in

$$\frac{(q-1).(m-1)(m-2) \ldots (m-q+1)}{m(m-1) \ldots (m-q+1)} = \frac{q-1}{m}.$$

Z. B. Im Zahlen-Lotto besetzt man eine Nummer zu einem bestimmten Auszuge; Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie herauskommen, aber nicht an der ihr angewiesenen Stelle sein wird?

Hier ist $m = 90$, $q = 5$; folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$. Demnach ist $1 - \frac{2}{45}$ oder $\frac{43}{45}$ diejenige Wahrscheinlichkeit, dass sie entweder an der bestimmten Stelle oder gar nicht herauskommen wird.

Setzt man $m=q$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{n.(m-1).(m-n)(m-n-1)\ldots(2-n)}{m(m-1)\ldots\ldots 2.1}$, welcher Ausdruk für $n>1$ unmöglich ist. Ist $m=q$, und $n=1$, so bekömmt man den Bruch $\frac{m-1}{m}$.

Z. B. Aus zehn verschiedenen Kartenblättern wählt man drei, und giebt jedem Blatte von diesen dreien eine bestimmte Stelle; hierauf zieht man die zehn gegebenen Karten alle hinter einander, je eine auf einmal: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich nur eine von den drei gewählten darunter befinden, und nicht an der ihr angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird, $= \frac{3.9.7.6.5.4.3.2.1.0.-1}{10\ldots\ldots 2.1}=0$, oder die bestimmte Begebenheit ist unmöglich.

Wählt man nur ein Blatt aus, und giebt demselben eine bestimmte Stelle; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe nicht an seiner Stelle herauskommen wird, $=\frac{9}{10}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Blatt an seiner Stelle herauskommen wird, $=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$.

§. 12.

Aufgabe. *Man sucht, unter eben den in §. 7. gemachten Voraussetzungen, auf wie viel gleich mögliche Arten sich keiner von den n ausgesonderten Fällen ereignen kann.*

Auflösung. Wenn sich keiner von den ausgesonderten Fällen ereignet, so können die $m-n$ nicht ausgesonderten Fälle die q vorausgesetzten Stellen auf so viel verschiedene Arten einnehmen, als die Zahl $(m-n)\ldots(m-n-q+1)$ angiebt (§. 2.); Folglich ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche keiner von den ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, $(m-n)\ldots$

$(m-n-q+1)$ oder $1.(1).(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)$, *W. Z. F.*

§. 13.*

Aufgabe. *Man sucht unter den (§. 7.) gemachten Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, dass keiner von den n ausgesonderten Fällen sich ereignet.*

Auflösung. Der Zähler ist diejenige Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten sich keiner von den ausgesonderten Fällen ereignen kann (§. 12); der Nenner ist $m\ldots\ldots(m-q+1)$ (§. 2). Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)}.$$ Man vergleiche Kap. V. §. 17.

Zum Beispiel. Aus dreizehn gegebenen verschiedenen Karten wählt man vier, so, dass jeder davon eine bestimmte Stelle angewiesen wird, und zieht alsdann sechs Blätter hinter einander blindlings heraus: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs gezogenen keine von den vier ausgewählten sich befinden wird, $=\frac{9\ldots.4}{13\ldots.8}=\frac{7}{143}$.

Zusatz. Ist $n=1$, so verwandelt sich die gefundene Formel in $\frac{m-q}{m}$, und für das Lotto ist $\frac{m-q}{m}=\frac{90-5}{90}=\frac{85}{90}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die besetzte Nummer beim ersten Zuge, oder beim zweiten, dritten, vierten oder fünften Zuge herauskommen, oder dass sie bei irgend einem Zuge erscheinen wird, $=1-\frac{85}{90}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$. Und die Wahrscheinlichkeit, dass die zu einem bestimmten Auszuge besetzte Nummer an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein kommen

wird, ist (§. 11) $= 1 - \left(\frac{85}{90} + \frac{4}{90}\right) = \frac{1}{90}$.

§. 14.

Lehrsatz. *Wenn die Voraussetzungen immer bleiben, wie sie (§. 7) gemacht worden sind; so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche sich just zwei von den ausgesonderten Fällen ereignen können, so dass keiner davon an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt,* $= {}^{n}C.((q-2)(q-1)+1).(m-n)(m-n-1)....(m-n-q+3)$, *oder*

$$\frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\left\{\begin{matrix}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{matrix}\right\}.(m-n)....(m-n-q+3).$$

Beweis. 1. Der Fall *a* kann unter den *q* sich begebenden Fällen, auf *q* gleich mögliche Arten sich ereignen, oder eine von den angenommenen *q* Stellen auf *q* gleich mögliche Arten einnehmen (§. 7). Nimmt er die erste Stelle ein, so kann dazu der Fall *b*, $q-1$ Stellen einnehmen; nimmt er die zweite Stelle ein, so finden für den Fall *b*, wenn er sich nach der Ereigniss von *a* begiebt, $q-2$ Stellen statt; nimmt er die dritte Stelle ein, so finden für *b*, unter der vorigen Bedingung, $q-3$ Stellen statt; und so weiter; nimmt endlich *a* die vorletzte oder $(q-1)$te Stelle ein, so kann *b* nur die darauf folgende letzte Stelle einnehmen. Folglich ist die Menge der gleich möglichen Arten, auf welche just die beiden *a* und *b* von den ausgesonderten Fällen, und zwar der Fall *a* zuerst, und alsdann *b*, sich ereignen können, die Summe der natürlichen Zahlen:

$$(q-1)+(q-2)+(q-3)+....+3+2+1=$$
$$\frac{q\,.\,(q-1)}{2} \text{ (Kap. III. §. 16.).}$$

2. Da sich nun dieses eben so verhält, wenn sich *b* zuerst und alsdann *a* ereignet; so darf man nur die eben gefundene Summe doppelt nehmen, um die Zahl

zu erhalten, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten ſich juſt zwei: *a* und *b*, von den ausgeſonderten Fällen ereignen können; welche alſo iſt: $q.(q-1)$.

3. Zur Erläuterung des eben geſagten dient folgende Tabelle, in welcher alle gleich mögliche Arten, auf welche ſich die beiden Fälle *a* und *b* von den *n* ausgeſonderten Fällen zugleich ereignen können, angegeben, und diejenigen Stellen, worin ſich Fälle von den nicht ausgeſonderten Fällen befinden, mit Sternchen bezeichnet worden ſind, imgleichen, der Allgemeinheit unbeſchadet, $q=5$ wie in §. 7. geſetzt worden iſt.

a	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*	*
a	*	*b*	*	*	*b*	*	*a*	*	*
a	*	*	*b*	*	*b*	*	*	*a*	*
a	*	*	*	*b*	*b*	*	*	*	*a*
*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*
*	*a*	*	*b*	*	*	*b*	*	*a*	*
*	*a*	*	*	*b*	*	*b*	*	*	*a*
*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*
*	*	*a*	*	*b*	*	*	*b*	*	*a*
*	*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*

4. *Oder:* Weil der Fall *a* unter den *q* ſich begebenden Fällen *q* mal ſeine Stelle verändern kann, und bei jeder Verſetzung von *a* der Fall *b*, $(q-1)$ mal ſeine Stelle verändern kann; ſo iſt die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten ſich juſt zwei von den ausgeſonderten Fällen, *a* und *b*, ereignen können, $= q.(q-1)$.

5. Dieſes läſst ſich ebenfalls für $q=5$, durch folgende Tafel erläutern:

a	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*	*	*b*	*	*a*	*	*
a	*	*b*	*	*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*
a	*	*	*b*	*	*	*a*	*	*b*	*	*	*	*a*	*b*	*
a	*	*	*	*b*	*	*a*	*	*	*b*	*	*	*a*	*	*b*

b	*	*	*a*	*	*b*	*	*	*	*a*
*	*b*	*	*a*	*	*	*b*	*	*	*a*
*	*	*b*	*a*	*	*	*	*b*	*	*a*
*	*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*

6. Alſo können die beiden Fälle a und b zwei von den q gegebenen Stellen auf $q.(q-1)$ Arten einnehmen, welche durch die Glieder beigefügter Tafeln (3, 5) angedeutet werden.

7. Von den gefundenen $q.(q-1)$ Gliedern muſs man diejenigen abrechnen, wo a die erſte, und b die zweite Stelle einnimmt; welche an der Zahl $2.(q-1)$ ſind, weniger dasjenige Glied, wo a die erſte und b die zweite Stelle einnimmt.

8. Alſo können die beiden Fälle a und b auf ſo viel Arten ſich ereignen, ſo daſs keiner an ſeiner Stelle erſcheinet, als die Zahl

$$q(q-1)-(2(q-1)-1)=q(q-1)-2(q-1)+1 \text{ oder } (q-2)(q-1)+1$$ angiebt.

9. Das, was jetzt von den beiden Fällen a und b geſagt worden iſt, läſst ſich auf gleiche Weiſe auf die Fälle:

a u. b
a u. c, b u. c
a u. d, b u. d, c u. d
a u. f, b u. f, c u. f, d u. f
—— —— —— —— ——

anwenden, deren Anzahl $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ iſt. Hieraus erſiehet man, daſs die Anzahl aller gleich möglichen Arten, auf welche je zwei allein von den ausgeſonderten Fällen ſich ereignen können, ſo, daſs keiner an der ihm ange-

wiesenen Stelle zum Vorschein kommt, sein wird:

$$\frac{n.(n-1)}{1\ .\ 2}.\left\{\begin{array}{l}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{array}\right\}\quad \text{oder}$$

$$^{n}C.((q-2)\,(q-1)+1).$$

10. Da sich überhaupt q Fälle hinter einander, je einer auf einmal, ereignen, und darunter just zwei von den n ausgewählten Fällen sein sollen; so können bei der Ereigniss einer jeden dieser (in 9) gefundenen Arten, $q-2$ von den $m-n$ nicht ausgewählten Fällen, die $q-2$ noch übrigen Stellen auf so viel Arten einnehmen, als die Zahl $(m-n)\,(m-n-1)\ldots.(m-n-q+3)$ angiebt.

11. Folglich ist die gesuchte Anzahl aller gleich möglichen Arten, auf welche je zwei Fälle allein von den ausgesonderten Fällen, keiner an seiner Stelle, sich ereignen können, =

$$\frac{n.(n-1)}{1\ .\ 2}.\left\{\begin{array}{l}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-n-q+3)\quad \text{oder}$$

$$^{n}C.((q-2)\,(q-1)+1).(m-n)\,(m-n-1)\ldots.(m-n-q+3).$$

W. Z. E.

§. 15.*

Aufgabe. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den §. 7. gemachten Voraussetzungen je zwei allein von den ausgesonderten Fällen, keiner an seiner Stelle, sich begeben werden?*

Auflösung. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist die Zahl

$$^{n}C.((q-2)\,(q-1)+1).(m-n)\ldots.(m-n-q+3), (§.14.);$$

Der Nenner ist $m\ldots.(m-q+1)$ (§. 2.). Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$^{n}C.((q-2)\,(q-1)+1).\frac{(m-n)\ldots.(m-n-q+3)}{m\ldots.(m-q+1)}\quad \text{oder}$$

$$\frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}.\left\{\begin{array}{l}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{array}\right\}.\frac{(m-n)\ldots.(m-n-q+3)}{m\ldots.(m-q+1)}.$$

§. 16.*

Beispiel 1. Werden von den 32 Piketkarten vier in folgender Ordnung ausgesprochen:

Herzen-König, die erste,
Tref-König, die fünfte,
Kareau-As, die siebente,
Pik-Dame, die zehnte,

und soll man aus den gegebenen 32 Karten zehn blindlings hinter einander, je eine auf einmal, herausziehen; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, daſs nur zwei von den ausgerufenen unter den gezogenen sich befinden werden, keine aber an der ihr angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird, wenn man in der (§. 15.) gefundenen allgemeinen Formel $m=32$, $q=10$, und $n=4$ setzt $=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}.(8\cdot 9+1).\frac{28\cdot 27\ldots.21}{32\cdot 31\ldots.23}$.

§. 17.*

Beispiel 2. Es werden im Lotto vier Nummern z. B. 4, 18, 29, 65, zu einer bestimmten Quaterne also besetzt, daſs Nummer 4 die erste, 65 die zweite, 18 die vierte, und 29 die fünfte sein soll, welche herauskommt. Man sucht die Wahrscheinlichkeit, daſs nur zwei davon herauskommen, also

entweder 4 und 18,
oder 4 und 29, oder 18 und 29,
oder 4 und 65, oder 18 und 65, oder 29 und 65,

keine aber an der ihr angewiesenen Stelle erscheinet.

Man setze (§. 15.) $m=90$, $q=5$, $n=4$, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=\frac{4\cdot 3}{1.2}.(3.4+1).\frac{86\cdot 85\cdot 84}{90\ldots.86}$.

§. 18.*

Beispiel 3. Man hat zwei Nummern des Lottospiels zu einer bestimmten Ambe besetzt, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, dass sie beide, aber keine an ihrer Stelle, herauskommen.

Hier ist $n=2$, und für diesen Fall verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 15.) in folgende:

$$((q-2)(q-1)+1).\frac{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots.(m-q+1)}{m.(m-1)(m-2)\ldots.(m-q+1)}=$$

$\frac{(q-2)(q-1)+1}{m\ (m-1)}$. Hierinnen also $m=90$, und $q=5$ gesetzt, erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=\frac{3.4+1}{90.89}=\frac{13}{8010}$. Also ist diejenige Wahrscheinlichkeit, dass beide an ihrer Stelle, oder eine an ihrer Stelle und die andere nicht an ihrer Stelle, oder nur eine (an ihrer Stelle oder nicht an ihrer Stelle), oder keine herauskommt, $=1-\frac{13}{8010}=\frac{7997}{8010}$.

§. 19.*

Zusatz. Wenn $n=q$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 15.) in

$$\frac{n(n-1)}{1.2}.((n-2)(n-1)+1).\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots.(m-2n+3)}{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}.$$

Z. B. 1. Man besetzt im Lotto fünf Nummern zu einer bestimmten Quine. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur zwei Nummern, keine an ihrer Stelle, herauskommen werden?

Es ist hier $m=90$, $n=5$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=\frac{5.4}{1.2}.(3.4+1).\frac{85.84.83}{90\ldots.86}$.

2. In einer Urne liegen zehn Kugeln, jede mit einer Zahl, von 1 bis 10, bezeichnet; acht Nummern

werden in folgender Ordnung hinter einander ausgesprochen: Num. 2 die erste, 1 die zweite, 4 die vierte, 6 die fünfte, 3 die siebente, 10 die achte, 7 die neunte, 5 die zehnte; und eben so viel werden alsdann blindlings herausgezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daſs just zwei von den in bestimmter Ordnung ausgesprochenen Nummern herauskommen werden, aber keine an der ihr angewiesenen Stelle erscheinen wird?

Hier ist $m = 10$, $n = 8$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{8.7}{1.2}.(6.7+1).\frac{2.1.0.-1.-2.-3}{10.9....3} = 0$, oder die bestimmte Begebenheit ist unmöglich.

Wenn $n = q = 2$, so ist die Formel für die Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{m(m-1)}$ (§. 18.).

Z. B. Es sind fünf Kartenblätter gegeben, darunter Pik-As und Koeur-Dame befindlich sind. Man sucht die Wahrscheinlichkeit, daſs, wenn zwei hinter einander blindlings herausgezogen werden, dieses die beiden genannten, aber in der umgekehrten Ordnung: Koeur-Dame und Pik-As sind.

Es ist $m = 5$, und also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{5.4} = \frac{1}{20}$.

Wenn $m = q = n = 2$, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.

Z. B. Es liegen zwei Kartenblätter, Kareau-As und Koeur-König, verdekt auf einem Tische; man nennt jenes und ziehet hierauf ein Blatt: so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs dieses Blatt nicht das ebengenannte sein wird, $= \frac{1}{2}$, eben so groſs als die Wahrscheinlichkeit, daſs diese Begebenheit nicht geschehen, oder daſs das genannte Blatt gezogen werden wird.

Setzt man $m = q$, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 15) in

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}((m-2)(m-1)+1) \cdot \frac{(m-n) \ldots (3-n)}{m \ldots 1} =$$

unmöglich oder o, für $n > 2$, wie ohnedies erhellet. Aber für $m = q$ und $n = 2$ ist die Wahrscheinlichkeit =

$$((m-2)(m-1)+1) \cdot \frac{(m-2)(m-3) \ldots 2 \cdot 1}{m \cdot (m-1)(m-2) \ldots 2 \cdot 1} = \frac{(m-2)(m-1)+1}{m(m-1)}.$$

Z B. Aus fünf Kartenblättern wählt man zwei Blätter: Kareau-Bube, die zweite,
Tref-König, die fünfte,
und zieht dann alle diese fünf Blätter, eins nach dem andern; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass keins von den genannten zwei Blättern an seiner Stelle herausgezogen werden wird, $= \frac{3 \cdot 4 + 1}{5 \cdot 4} = \frac{13}{20}$.

§. 20.*

Lehrsatz. *Sollen just drei Fälle von den n ausgesonderten Fällen, aber kein einziger von diesen dreien an seiner Stelle sich ereignen; so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit* =

$$^{n}D \cdot (q \cdot (q-1) \cdot (q-2) - 3 \cdot (q-1)^2 - 1) \times \frac{(m-n) \cdot (m-n-1) \ldots (m-n-q+4)}{m \cdot (m-1) \ldots (m-q+1)}$$ *oder*

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot (q-2)(q-1)q \\ -3 \cdot (q-2)(q-1) \\ +3 \cdot (q-2) \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+4)}{m \ldots (m-q+1)}.$$

Beweis. 1) Die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten sich just folgende drei, a, b, c, von den n ausgesonderten Fällen ereignen können, ist $= q(q-1)(q-2)$; welches sich, für $q = 5$, durch folgende Tafel erläutern läst, die aus der (in §. 14. Num. 5.) angegebenen, sehr leicht herzuleiten ist:

	Erſte verticale Kolumne					*Zweite verticale Kolumne*					*Dritte verticale Kolumne*					*Vierte verticale Kolumne*				
Erſte horizontale Kolumne	a	b	c	*	*	a	c	b	*	*	a	c	*	b	*	a	c	*	*	b
	a	b	*	c	*	a	*	b	c	*	a	*	c	b	*	a	*	c	*	b
	a	b	*	*	c	a	*	b	*	c	a	*	*	b	c	a	*	*	c	b
Zweite horizontale Kolumne	b	a	c	*	*	c	a	b	*	*	c	a	*	b	*	c	a	*	*	b
	b	a	*	c	*	*	a	b	c	*	*	a	c	b	*	*	a	c	*	b
	b	a	*	*	c	*	a	b	*	c	*	a	*	b	c	*	a	*	c	b
Dritte horizontale Kolumne	b	c	a	*	*	c	b	a	*	*	c	*	a	b	*	c	*	a	*	b
	b	*	a	c	*	*	b	a	c	*	*	c	a	b	*	*	c	a	*	b
	b	*	a	*	c	*	b	a	*	c	*	*	a	b	c	*	*	a	c	b
Vierte horizontale Kolumne	b	c	*	a	*	c	b	*	a	*	c	*	b	a	*	c	*	*	a	b
	b	*	c	a	*	*	b	c	a	*	*	c	b	a	*	*	c	*	a	b
	b	*	*	a	c	*	b	*	a	c	*	*	b	a	c	*	*	c	a	b
Fünfte horizontale Kolumne	b	c	*	*	a	c	b	*	*	a	c	*	b	*	a	c	*	*	b	a
	b	*	c	*	a	*	b	c	*	a	*	c	b	*	a	*	c	*	b	a
	b	*	*	c	a	*	b	*	c	a	*	*	b	c	a	*	*	c	b	a

Nämlich aus jeder Versetzung der angeführten Tafel des §. 14. Num. 5. entstehen $(q-2)$ neue Versetzungen; da es nun daselbst $q\,(q-1)$ Versetzungen giebt, wie erwiesen worden ist; so ist die Anzahl aller Versetzungen in der hier gegebenen Tafel $= q\,(q-1)\,(q-2)$.

2) Die *erste horizontale Kolumne* dieser Tafel enthält $(q-1)\,(q-2)$ Glieder, deren jedes aus q Fällen zusammengesetzt ist, und wo allezeit wenigstens der Fall *a*, seine ihm angewiesene Stelle einnimmt.

Die *zweite horizontale Kolumne* enthält $(q-2)$ Glieder, jedes aus q Fällen bestehend, wo *c* die ihm angewiesene dritte Stelle einnimmt; nämlich:

b a c * * etc.	———	———	———	
———	———	* *a c b* * etc.	* *a c* * *b* etc.	etc.
———	———	———	———	
etc.	etc.	etc.	etc.	

Die *vierte horizontale Kolumne* enthält $(q-3)$ Glieder, wo *c* die dritte Stelle einnimmt, dasjenige ausgenommen, welches daselbst in der zweiten senkrechten Kolumne befindlich ist: * *b c a* *; nämlich:

———	———	———	———	
b * *c a* *	———	———	———	
———	———	———	* * *c a b*	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	

Mit der *fünften* und *allen darauf folgenden horizontalen Kolumnen* ist es eben so beschaffen; daß es also, von der vierten horizontalen Kolumne an, $(q-3).(q-3)$ Glieder, jedes von q Fällen, giebt, wo *c* allezeit die ihm angewiesene dritte Stelle einnimmt, dasjenige in der zweiten senkrechten Kolumne allemal abgerechnet.

In der *zweiten senkrechten*, und zugleich in der *dritten*, *vierten*, *fünften u. s. f. horizontalen Kolumne* sind $(q-2).(q-2)$ Glieder, jedes von q Fällen vorhanden,

und in jedem derselben nimmt der Fall b allezeit die ihm angewiesene zweite Stelle ein.

Man vergleiche hiemit die Tafel des folgenden §. 21. Num. 1. für $q = 7$. Demnach ist die Anzahl der Glieder, wo a, b und c die ihnen angewiesenen Stellen einnehmen =

$$(q-1).(q-2)+(q-2)+(q-3)^2+(q-2)^2$$
$$= (q-1)(q-2)+(q-2)+(q-3).(q-2-1)+(q-2)^2$$
$$= (q-1)(q-2)+(q-2)+(q-3).(q-2)-(q-2)+1+(q-2)^2$$
$$= (q-2).((q-1)+1+(q-3)-1+(q-2))+1$$
$$= (q-2).((q-2)+(q-2)+(q-2))+1$$
$$= 3.(q-2)^2+1.$$

3) Subtrahirt man diese eben gefundene Zahl $3(q-2)^2+1$ von der Anzahl aller Glieder, welche die beigefügte Tafel enthält, und deren Zahl $q.(q-1).(q-2)$ ist (Num. 1); so erhält man

$$q(q-1)(q-2)-3(q-2)^2-1,$$

das ist die Menge der gleich möglichen Arten, auf welche sich die drei Fälle: a, b und c zugleich also ereignen können, dass keiner an seiner Stelle zum Vorschein kommt.

Es ist auch $3(q-2)^2+1=(3q-6)(q-2)+1=(3(q-1)-3)(q-2)+1=3(q-1)(q-2)-3(q-2)+1$, folglich $q(q-1)(q-2)-3(q-2)^2-1=1.q(q-1)(q-2)-3.(q-1)(q-2)+3.(q-2)-1$; auf ähnliche Art ausgedrükt, wie die Menge der gleich möglichen Arten, auf welche sich die zwei Fälle a und b ereignen können, so dass keiner an seiner Stelle erscheinet, §. 14. Num. 8: $1.q.(q-1)-2.(q-1)+1$. Nämlich die Zahlenkoëfficienten:

1, 2, 1

1, 3, 3, 1

folgen in beiden Formeln dem Gesetze der *Binomialkoëf-*

ficienten *), und die Aehnlichkeit der übrigen Faktoren, nebst der Abwechselung der Zeichen vor den einzelnen Gliedern fällt in die Augen. Man vergleiche auch die allgemeine Formel, welche in §. 7. gefunden worden ist.

4) Die Verbindungen der n ausgesonderten Fälle: a, b, c, d, f, etc. nach dreien sind folgende:

$a\ b\ c$
$a\ b\ d \quad a\ c\ d$
$a\ b\ f \quad a\ c\ f \quad a\ d\ f$
etc. etc. etc. etc.

$b\ c\ d$
$b\ c\ f \quad b\ d\ f$
etc. etc. etc.

$c\ d\ f$
etc. etc.

etc.

und die Anzahl dieser Verbindungen ist $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$.

Da sich nun dasjenige, was bisher (Num. 1 – 3) bei den drei bestimmten Fällen: a, b und c untersucht worden ist, auf eine jede solche Conternation anwenden läfst; so erhellet, dafs die Anzahl aller gleich möglichen Arten ist, auf welche je drei allein von den ausgesonderten Fällen sich ereignen können, so dafs keiner an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt, $=$
$${}^nD.(q(q-1)(q-2)-3(q-2)^2-1).$$

5) Wenn sich aber eine von diesen (Num. 4.) gefundenen Arten, es sei welche es wolle, ereignet; so können $q-3$ von den $m-n$ nicht ausgesonderten Fällen, die noch übrigen $q-3$ Plätze auf $(m-n).(m-n-1)....(m-n-q+4)$ Arten einnehmen.

*) *Kästners* Analysis endlicher Gröfsen §. 117.

6) Folglich iſt die geſuchte Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche je drei allein von den ausgeſonderten Fällen ſich ereignen können, ſo daſs keiner ſich an ſeiner Stelle ereignet, =

$$ {}^{n}D.(q(q-1).(q-2)-3.(q-2)^2-1).(m-n)\ldots(m-n-q+4). $$

Und die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\left\{\begin{array}{l} +1.(q-2)(q-1)q \\ -3.(q-2)(q-1) \\ +3.(q-2) \\ -1 \end{array}\right\}\times \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+4)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)}. $$

W. Z. E.

§. 21. *

LEHRSATZ. *Wenn ſich juſt vier Fälle von den n ausgeſonderten Fällen zugleich ereignen ſollen, ſo daſs keiner an ſeiner Stelle ſich ereignet: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit* =

$$ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-3)(q-2)(q-1)q \\ -4.(q-3)(q-2)(q-1) \\ +6.(q-3)(q-2) \\ -4.(q-3) \\ +1 \end{array}\right\}\times \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+5)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)}. $$

BEWEIS. 1) Beigefügte Tafel enthält für $q=7$, $q.(q-1).(q-2)=7.6.5=210$ Glieder, davon jedes Glied aus q oder ſieben Fällen beſtehet; und zeigt auch an, auf wie viel Arten ſich juſt die drei beſtimmten Fälle: *a*, *b*, *c* von den *n* beſonders ausgewählten Fällen ereignen können, wenn ſich überhaupt q Fälle von der Anzahl m aller Fälle ereignen ſollen.

2) Kommt ein vierter Fall, *d*, hinzu; ſo entſpringen aus jedem Gliede dieſer Tafel $q-3$ oder 4 neue Glie-

PERMUTATIONS-TAFEL zu §. 21. Num. 1.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
I.	a b c * * * * a b * c * * * a b * * c * * a b * * * c * a b * * * * c	a c b * * * * a * b c * * * a * b * c * * a * b * * c * a * b * * * c	a c * b * * * a * c b * * * a * * b c * * a * * b * c * a * * b * * c	a c * * b * * a * c * b * * a * * c b * * a * * * b c * a * * * b * c	a c * * * b * a * c * * b * a * * c * b * a * * * c b * a * * * * b c	a c * * * * b a * c * * * b a * * c * * b a * * * c * b a * * * * c b
II.	q − 3 b a c * * * * b a * c * * * b a * * c * * b a * * * c * b a * * * * c q − 4	q − 3 c a b * * * * * a b c * * * * a b * c * * * a b * * c * * a b * * * c	q − 3 c a * b * * * * a c b * * * * a * b c * * * a * b * c * * a * b * * c	q − 3 c a * * b * * * a c * b * * * a * c b * * * a * * b c * * a * * b * c q − 4	q − 3 c a * * * b * * a c * * b * * a * c * b * * a * * c b * * a * * * b c q − 4	q − 3 c a * * * * b * a c * * * b * a * c * * b * a * * c * b * a * * * c b q − 4
III.	q − 3 b c a * * * * b * a c * * * b * a * c * * b * a * * c * b * a * * * c	c b a * * * * * b a c * * * * b a * c * * * b a * * c * * b a * * * c	c * a b * * * * c a b * * * * * a b c * * * * a b * c * * * a b * * c	q − 3 c * a * b * * * c a * b * * * * a c b * * * * a * b c * * * a * b * c	q − 3 c * a * * b * * c a * * b * * * a c * b * * * a * c b * * * a * * b c	q − 3 c * a * * * b * c a * * * b * * a c * * b * * a * c * b * * a * * c b
IV.	q − 3 b c * a * * * b * c a * * * b * * a c * * b * * a * c * b * * a * * c	c b * a * * * * b c a * * * * b * a c * * * b * a * c * * b * a * * c	c * b a * * * * c b a * * * * * b a c * * * * b a * c * * * b a * * c	q − 3 c * * a b * * * c * a b * * * * c a b * * * * * a b c * * * * a b * c	q − 3 c * * a * b * * c * a * b * * * c a * b * * * * a c b * * * * a * b c	q − 3 c * * a * * b * c * a * * b * * c a * * b * * * a c * b * * * a * c b
V.	q − 3 b c * * a * * b * c * a * * b * * c a * * b * * * a c * b * * * a * c q − 4	c b * * a * * * b c * a * * * b * c a * * * b * * a c * * b * * a * c	q − 3 c * b * a * * * c b * a * * * * b c a * * * * b * a c * * * b * a * c	q − 3 c * * b a * * * c * b a * * * * c b a * * * * * b a c * * * * b a * c	q − 3 c * * * a b * * c * * a b * * * c * a b * * * * c a b * * * * * a b c q − 4	q − 3 c * * * a * b * c * * a * b * * c * a * b * * * c a * b * * * * a c b q − 4
VI.	q − 3 b c * * * a * b * c * * a * b * * c * a * b * * * c a * b * * * * a c q − 4	c b * * * a * * b c * * a * * b * c * a * * b * * c a * * b * * * a c	q − 3 c * b * * a * * c b * * a * * * b c * a * * * b * c a * * * b * * a c	q − 3 c * * b * a * * c * b * a * * * c b * a * * * * b c a * * * * b * a c	q − 3 c * * * b a * * c * * b a * * * c * b a * * * * c b a * * * * * b a c q − 4	q − 3 c * * * * a b * c * * * a b * * c * * a b * * * c * a b * * * * c a b q − 4
VII.	q − 3 b c * * * * a b * c * * * a b * * c * * a b * * * c * a b * * * * c a q − 4	c b * * * * a * b c * * * a * b * c * * a * b * * c * a * b * * * c a	q − 3 c * b * * * a * c b * * * a * * b c * * a * * b * c * a * * b * * c a	q − 3 c * * b * * a * c * b * * a * * c b * * a * * * b c * a * * * b * c a	q − 3 c * * * b * a * c * * b * a * * c * b * a * * * c b * a * * * * b c a q − 4	q − 3 c * * * * b a * c * * * b a * * c * * b a * * * c * b a * * * * c b a q − 4

Glieder: daſs alſo bei vier ſich ereignenden Fällen *a*, *b*, *c*, *d*, von den *n* ausgeſonderten Fällen die neue Tafel $q(q-1)(q-2)(q-3)$ oder $7.6.5.4=840$ Glieder bekommen wird, davon jedes aus *q* Fällen beſtehet.

3) Wir wollen nun unterſuchen, wie viel Glieder in dieſer neuen Tafel, welche aus der beigefügten entſpringet, vorhanden ſind, in welchen *a*, *b*, *c* und *d* die ihnen angewieſenen Stellen einnehmen; die Anzahl dieſer Glieder von der Anzahl aller Glieder, welche dieſe neue Tafel enthält, und in Num. 2. angegeben worden iſt, abgerechnet, erhält man die Menge der Glieder, wo die vier Fälle *a*, *b*, *c*, *d* zugleich erſcheinen, aber keiner an ſeinem Orte befindlich iſt. Zu dem Ende werden wir die im vorigen §. 20. Num. 1. angenommene Bezeichnung der *verticalen* und *horizontalen Kolumnen* der Tafel auch hier beibehalten.

4) Aus der *erſten horizontalen Kolumne* entſtehen, wenn *d* hinzukommt, $(q-1)(q-2)(q-3)$ neue Glieder, und in jedem derſelben nimmt *a* die gehörige Stelle ein. Denn aus jedem Gliede entſpringen $(q-3)$ Glieder, und die erſte horizontale Kolumne enthält $(q-1)(q-2)$ Glieder, folglich giebt das Produkt $(q-1)(q-2)(q-3)$ die Anzahl der Glieder, die aus der erſten horizontalen Kolumne entſtehen, wenn noch ein vierter Fall hinzukommt.

5) Die *zweite verticale Kolumne* enthält $(q-2)(q-2)$ Glieder, in welchen *b* die zweite Stelle einnimmt. Da nun aber, wenn der Fall *d* hinzukommt, aus jedem Gliede $(q-3)$ neue Glieder entſpringen, ſo iſt, bei vier Fällen, die Summe der Glieder, wo *b* die gehörige Stelle einnimmt, $=(q-2)^2(q-3)$.

Untersuchung der ersten verticalen Kolumne.

a) *des Fachs derſelben in der zweiten horizontalen Kolumne.*

6) Aus dem Gliede *b a c* * * * * entſtehen, wenn ein vierter Fall *d* hinzukommt, $(q-3)$ neue Glieder, in

welchen c an ſeiner Stelle ſich befindet.

$$\text{Aus dem Gliede} \left\{\begin{matrix} b\,a * * c * * \\ b\,a * * * c * \\ b\,a * * * * c \end{matrix}\right\} \text{entſpringt} \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\} \text{Glied,}$$

wo d an ſeiner Stelle eintrift, und dieſes geht durch $(q-4)$ Glieder fort, daſs alſo die Summe dieſer *Einſen* $= q-4$ beträgt.

b) *des Fachs in der dritten horizontalen Kolumne.*

Hieraus entſpringen $q-3$ Glieder, in welchen der hinzugekommene Fall d an ſeiner Stelle iſt.

c) *des Fachs in der vierten horizontalen Kolumne.*

Aus ihm entſtehen $q-3$ Glieder, in welchen c die dritte Stelle einnimmt.

d) *Des Fachs in der fünften horizontalen Kolumne.*

Man bekömmt $q-3$ Glieder, in welchen c; und $q-4$ Glieder, in welchen d die gehörige Stelle einnimmt.

e) *des Fachs in der 6ten, 7ten, u. ſ. f. bis qten horizontalen Kolumne.*

Aus jedem Fache entſpringen, wie beim nächſtvorhergehenden, $q-3$ Glieder, in welchen c; und $q-4$ Glieder, in welchen d die angewieſene Stelle einnimmt.

Untersuchung des Fachs der zweiten verticalen Kolumne in der zweiten horizontalen Kolumne.

7) *Aus demſelben entſpringen $q-3$ Glieder, wo d an ſeiner Stelle iſt.*

Untersuchung der dritten verticalen Kolumne.

a) *des Fachs in der zweiten horizontalen.*

8) Es giebt $q-3$ Glieder, wo c an ſeiner Stelle iſt.

b) *des Fachs in der dritten und vierten horizontalen Kolumne.*

Aus keinem entſpringen Glieder, in welchen die Fälle a, b, c, d an ihrer Stelle ſich befinden.

c) *des Fachs in der fünften, sechsten, siebenten u. s. f. bis qten horizontalen Kolumne.*

Aus jedem Fache entstehen $q-3$ Glieder, wo d die gehörige Stelle einnimmt.

Folglich entspringen, wenn ein vierter Fall d hinzukommt, aus den Fächern der dritten verticalen Kolumne, dasjenige Fach, welches in der ersten horizontalen Kolumne befindlich ist, davon abgerechnet, $(q-3)(q-3)$ *neue Glieder, wo entweder c oder d die ihnen angewiesenen Stellen einnehmen.*

UNTERSUCHUNG DER VIERTEN VERTICALEN KOLUMNE.

a) *des Fachs in der zweiten horizontalen Kolumne.*

9) Es giebt $q-3$ wo c; und $q-4$ Glieder, wo d an seiner Stelle ist.

b) *des Fachs in der dritten, vierten, fünften,.... qten horizontalen Kolumne.*

Aus jedem Fache erhält man $q-3$ Glieder, in welchen entweder d oder c die gehörige Stelle einnimmt.

Folglich entspringen, wenn ein vierter Fall d hinzukommt, aus dem Fache der vierten verticalen Kolumne in der zweiten horizontalen, $q-4$ *neue Glieder, wo d an seiner Stelle sich befindet.*

UNTERSUCHUNG DER FÜNFTEN, SECHSTEN, BIS $(q-1)^{\text{ten}}$ VERTICALEN KOLUMNE.

a) *der in der zweiten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

10) Aus jedem Fache entspringen $q-3$ Glieder wo c, und $q-4$ Glieder wo d die ihm angewiesene Stelle einnimmt.

b) *der in der dritten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

Aus jedem Fache entstehen $q-3$ Glieder, wo d die gehörige Stelle einnimmt.

c) *der in der vierten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

Aus jedem Fache entstehen $q-3$ Glieder, wo c die gehörige Stelle einnimmt.

d) *der in der fünften, sechsten, siebenten u. s. f. bis qten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

Jedes Fach giebt $q-3$ Glieder, wo c, und $q-4$ Glieder, wo d an seiner Stelle vorkommt.

11) Vergleicht man nun die verticalen Reihen, die erste, vierte, fünfte, sechste, u. s. f. bis $(q-1)$ te mit einander, so findet man (aus Num. 6, 9 und 10) daſs aus jeder verticalen Reihe $(q-3)(q-1)$ Glieder entstehen, wo entweder c die dritte, oder d die vierte Stelle einnimmt. Folglich ist die sämmtliche Anzahl dieser Glieder $= (q-3)(q-1).(q-3)$, weil es $q-3$ dergleichen verticale Reihen giebt.

12) Vergleicht man ferner die verticalen Reihen, die erste, fünfte, sechste, u. s. f. $(q-1)$ te mit einander, so bekömmt man (Num. 6 und 10) aus jeder verticalen Reihe $(q-4)(q-3)$ Glieder, in welchen der Fall d die ihm angewiesene Stelle einnimmt; nun sind $q-4$ solche verticale Reihen, also ist die Menge aller dieser Glieder $=$ $(q-4)(q-3).(q-4)$.

13) Demnach ist die gesuchte Anzahl der Glieder (Num. 3) in der neuen Tafel, welche aus der beigefügten entstehet, und worin die vier Fälle: a, b, c, d, die ihnen angewiesenen Stellen einnehmen (Num. 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12) =

$$(q-1)(q-2)(q-3)+(q-2)^2(q-3)+(q-3)+(q-3)^2+$$
$$(q-4)+(q-3)^2(q-1)+(q-4)^2(q-3) =$$
$$4(q-1)(q-2)(q-3)-6(q-2)(q-3)+4(q-3)-1.$$

14) Oder, wenn man die Glieder, wo a, b, c, d am gehörigen Orte sich befinden, horizontal summirt, so hat man:

$(q-1)(q-2)(q-3)+(q-2)^2(q-3)+(q-3)(q-1)+$
$(q-4)(q-3)+2(q-3)^2+(q-4)(q-3)(q-2)+(q-4)^3=$
$4(q-1)(q-2)(q-3)-6(q-2)(q-3)+4(q-3)-1$
wie vorhin in Num. 13.

15) Alſo iſt die Anzahl der Glieder, wo *a, b, c, d* beiſammen ſind, aber keiner an ſeinem Orte befindlich iſt, =

$$1.(q-3)(q-2)(q-1)q-4.(q-3)(q-2)(q-1)$$
$$+6.(q-3)(q-2)-4.(q-3)+1.$$

Auch hier folgen die Zahlenkoëfficienten dem Geſetze der Binomialkoëfficienten: 1, 4, 6, 4, 1. Man vergleiche *vorhergeh.* §. 20. Num. 3.

16) Die Menge der Verbindungen von *n* Fällen nach 4 iſt $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$, womit alſo die in Num. 15. gefundene Zahl gevielfältigt werden muſs, um die ganze Menge der Ordnungen zu erhalten, wo je vier Fälle beiſammen ſind, aber keiner an ſeiner Stelle befindlich iſt.

17) Das eben (in 16) gefundene Produkt wird nun mit $(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+5)$ multiplicirt. Vergleiche *vorhergeh. §. 20. Num. 5, 6.* So bekömmt man den Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit. Der Nenner derſelben iſt $m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)$. Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$^{n}E.\left\{\begin{array}{l}1.(q-3)\ldots\ldots q\\ -4.(q-3)\ldots\ldots(q-1)\\ +6.(q-3)(q-2)\\ -4(q-3)\\ +1\end{array}\right\}.\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+5)}{m\ldots\ldots(m-q+1)}.\quad W.Z.E.$$

§. 22.*

Zusatz. Sollen von den ausgeſonderten Fällen, 5, 6, u. ſ. f. Fälle allein, aber nicht ein einziger an ſeiner Stelle ſich ereignen: ſo wird die Wahrſcheinlichkeit

dieser Begebenheit sein (man vergleiche §. 13, 10, 15, 20, 21):

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-4)(q-3)(q-2)(q-1)q \\ -5.(q-4)(q-3)(q-2)(q-1) \\ +10.(q-4)(q-3)(q-2) \\ -10.(q-4)(q-3) \\ +5.(q-4) \\ -1 \end{array}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+6)}{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-5)(q-4)(q-3)(q-2)(q-1)q \\ -6.(q-5)(q-4)(q-3)(q-2)(q-1) \\ +15.(q-5)(q-4)(q-3)(q-2) \\ -20.(q-5)(q-4)(q-3) \\ +15.(q-5)(q-4) \\ -6.(q-5) \\ +1 \end{array}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n-q+7)}{m\,(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-q+1)};$$

u. s. w.

§. 23.

Hieraus ersiehet man, dass überhaupt im gegenwärtigen Falle §. 7, die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche just eine Anzahl r von den n ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, so dass keiner von diesen r Fällen an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignet, folgende ist:

$$^{n}R.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-r+1)\ldots q \\ -r.(q-r+1)\ldots(q-1) \\ +{}^{r}C.(q-r+1)\ldots(q-2) \\ - \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+1).$$

§. 24.

Beiſpiel. Aus einem Haufen von zehn verſchiedenen Karten ſoll man blindlings acht Blätter hinter einander je eins auf einmal herausziehen, da einem jeden von ſechs gegebenen Blättern aus dieſem Haufen eine beſondere Stelle angewieſen worden iſt. Man verlangt zu wiſſen, auf wie viel gleich mögliche Arten unter den acht herausgezogenen Blättern ſich weder mehr noch weniger als vier von den ausgeſonderten ſechs Blättern befinden können, ſo daſs nicht ein einziges von dieſen ſechs Blättern an der ihm angewieſenen Stelle herausgezogen werde.

Dieſes zu finden, ſetze man in der allgemeinen Formel, die im vorhergehenden §. 23. gegeben worden iſt, $m=10$, $n=6$, $q=8$, $r=4$, ſo verwandelt ſie ſich in

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{array}\right\}\cdot 4.3.2.1 = 360\,360,$$

welches die geſuchte Zahl iſt.

§. 25.

Zusatz. Wenn überhaupt m die Anzahl aller möglichen Fälle anzeigt, die von einem gegebenen Zuſtande abhängen; n dieſer Fälle hinter einander genannt werden, indem einem jeden eine gewiſſe Stelle angewieſen wird; und wenn ſich q Fälle von den gegebenen m Fällen je einer auf einmal ereignen ſollen: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich juſt r von den n beſonders ausgewählten Fällen ereignen werden, ſo daſs nicht ein einziger an den ihm angewieſenen Orte zum Vorſchein kommt:

$$ {}^{n}R.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-r+1)(q-r+2)\ldots(q-2)(q-1)q \\ -r.(q-r+1)(q-r+2)\ldots(q-2)(q-1) \\ +{}^{r}C.(q-r+1)(q-r+2)\ldots(q-2) \\ - \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm{}^{r}C.(q-r+1)(q-r+2) \\ \mp r.(q-r+1) \\ \pm 1 \end{array}\right\}\times $$

$$ \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)} $$

wo sich die Reihe mit $+1$ oder -1 endigt, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet. Denn der Zähler dieser Wahrscheinlichkeit ist offenbar die allgemeine Formel, welche §. 23. gefunden worden, und der Nenner ist $m\ldots(m-q+1)$ (§. 2.).

§. 26.

Beispiel. Von zehn gegebenen Kartenblättern nenne man sechs in folgender bestimmten Ordnung hinter einander: Pik-As die dritte, Pik-Dame die vierte, Tref-König die fünfte, Koeur-Dame die sechste, Kareau-Bube die siebente, Koeur-König die achte. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs, wenn acht von diesen zehn Karten, je eine auf einmal gezogen werden, darunter sich just vier von den genannten Blättern befinden, so daſs keine davon an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt?

Man setze in der im vorhergehenden §. 25. gefundenen allgemeinen Formel $m=10$, $n=6$, $q=8$, $r=4$; so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$ \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\left\{\begin{array}{l} 1.5.6.7.8 \\ -4.5.6.7 \\ +6.5.6 \\ -4.5 \\ +1 \end{array}\right\}.\frac{4.3.2.1}{10.9.8.7.6.5.4.3}=\frac{360360}{1814400}=\frac{1001}{5010}. $$

§. 27.

Wenn $n=q$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 25.) in

$$\frac{n \ldots\ldots (n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1.(n-r+1)\ldots\ldots n \\ -r.(n-r+1)\ldots\ldots(n-1) \\ +\frac{r.(r-1)}{1.2}.(n-r+1)\ldots(n-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} \times \frac{(m-n)\ldots\ldots(m-2n+r+1)}{m\ldots\ldots(m-n+1)}.$$

Zum Beispiel. Aus zehn verschiedenen Karten hat man acht ausgesondert, indem man einer jeden eine bestimmte Stelle angewiesen, und aus den zehn gegebenen Blättern sollen acht hinter einander blindlings herausgezogen werden; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen sich just sechs von den ausgesonderten Blättern befinden werden, so dass kein einziges die ihm angewiesene Stelle einnimmt, =

$$\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -6.3 \\ +1 \end{array} \right\} \cdot \frac{2.1}{3.4.5.6.7.8.9.10} = \frac{9403}{32400}.$$

§. 28.

Wenn $n=r$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots\ldots q \\ -n.(q-n+1)\ldots\ldots(q-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} : m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Wenn also (im vorhergehenden Beispiel §. 27.) sechs Blätter ausgesondert worden; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen sich alle sechs befinden werden, so dass keine diejenige Stelle einnimmt, welche ihr angewiesen worden ist, =

$$\left\{\begin{array}{l} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -6.3 \\ +1 \end{array}\right\} . 10.9.8.7.6.5 = \frac{9403}{151400}.$$

§. 29.

Ist $q=n=r$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{\begin{array}{l} 1.1.2 \ldots\ldots q \\ -q.1.2 \ldots\ldots (q-1) \\ +\frac{q.(q-1)}{1\,.\,2}.1.2 \ldots\ldots (q-2) \\ -+ \ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1) =$$

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots q}\right).\frac{1.2\ldots\ldots q}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)}.$$

So ist, wenn man von zehn verschiedenen Karten acht, eine nach der andern, nennet, einer jeden davon eine bestimmte Stelle anweiset, und aus den zehn gegebenen Karten acht hinter einander herausziehet, die Wahrscheinlichkeit, dass die acht herausgezogenen Karten die acht genannten sein werden, so dass nicht eine einzige die ihr angewiesene Stelle einnimmt, =

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\right):45=\frac{2119}{259200}.$$

§. 30.

Für $m=q$ und $r=n$ verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{\begin{matrix} 1.(m-n+1)\ldots.m \\ -n.(m-n+1)\ldots(m-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(m-n+1)\ldots.(m-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}: m(m-1)\ldots.(m-n+1) =$$

$$1-n.\frac{1}{m}+{}^nC\frac{1}{m(m-1)}-{}^nD.\frac{1}{m(m-1)(m-2)}+-\ldots\pm\frac{1}{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}.$$

Zum Beispiel. Es ſind zehn verſchiedene Karten gegeben, drei davon nennet man eine nach der andern, und giebt jeder eine beſtimmte Stelle, hierauf ziehet man blindlings die zehn gegebenen Karten, je eine auf einmal: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs keine von den drei genannten Karten an ihrer Stelle herausgezogen werden wird

$$\left\{\begin{matrix} 1.8.9.10 \\ -3.8.9 \\ +3.8 \\ -1 \end{matrix}\right\}: 10.9.8 = 1-3.\frac{1}{10}+3.\frac{1}{10.9}-\frac{1}{10.9.8}=\frac{527}{720}.$$

§. 31.

Setzt man $m=q=n=r$, ſo giebt die allgemeine Formel

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots.\pm\frac{1}{1.2.3\ldots.m}.$$

Z. B. Wenn man dreizehn gegebene Kartenblätter eins nach dem andern nennet, und bei jedem Blatte, das man nennet, eins aus den dreizehn gegebenen Blättern blindlings herausziehet, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs keine der herausgezogenen Karten diejenige ſein wird, welche man eben zuvor genannt hat, =

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots-\frac{1}{1.2.3\ldots11.12.13}=\frac{63633137}{172972800}.$$

§. 32.

Für $r = 0$ wird die allgemeine Formel

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)};$$ (Man sehe §. 13.).

§. 33.

Aufgabe. *Es bleiben die Voraussetzungen, wie sie §. 7. gemacht worden sind. Man sucht, auf wie viel gleich mögliche Arten keiner von den n besonders ausgewählten Fällen an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen kann.*

Auflösung. Die gesuchte Zahl ist die Summe aller gleich möglichen Arten, auf welche sich just 0, 1, 2, 3, 4, ... r, ... $(n-2)$, $(n-1)$, n von den n ausgesonderten Fällen ereignen können, ohne daſs einer an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignet. Also ist (aus §. 23.) die gesuchte Zahl folgende Reihe:

$$^{n}A.[1].(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)$$

$$+{}^{n}B.\left\{\begin{matrix}1.q\\-1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+2)$$

$$+{}^{n}C.\left\{\begin{matrix}1.(q-1)q\\-2(q-1)\\+1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+3)$$

$$+{}^{n}D.\left\{\begin{matrix}1.(q-2)(q-1)q\\-3.(q-2)(q-1)\\+3.(q-2)\\-1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+4)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+{}^{n}A.\left\{\begin{matrix}{}^{n}A.(q-n+1)\ldots q\\-{}^{n}B.(q-n+1)\ldots(q-1)\\+{}^{n}C.(q-n+1)\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\\\pm{}^{n}A\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-q+1);$$

W. Z. F.

§. 34.

Beispiel. Es ſind zehn Karten gegeben, davon werden ſechs ausgeſondert, ſo daſs man einer jeden eine beſtimmte Stelle anweiſet.

Aus den zehn gegebenen Karten ſoll man acht blindlings, eine nach der andern, herausziehen: Man verlangt zu wiſſen, auf wie viel gleich mögliche Arten es geſchehen könne, daſs ſich keine von den ſechs ausgeſonderten Karten an der ihr angewieſenen Stelle ereignen werde?

Man ſetze in der eben gefundenen allgemeinen Formel $m = 10$, $n = 6$, $q = 8$; ſo bekömmt man die geſuchte Zahl =

$$\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 \\ -4\cdot5\cdot6\cdot7 \\ +6\cdot5\cdot6 \\ -4\cdot5 \\ +1 \end{array}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$+6\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 \\ -5\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 \\ +10\cdot4\cdot5\cdot6 \\ -10\cdot4\cdot5 \\ +5\cdot4 \\ -1 \end{array}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2$$

$$+1\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 \\ -6\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 \\ +15\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 \\ -20\cdot3\cdot4\cdot5 \\ +15\cdot3\cdot4 \\ -6\cdot3 \\ +1 \end{array}\right\}\cdot4\cdot3 = 982812.\ ^{*)}$$

*) Es befinden ſich nämlich wenigſtens vier von den ſechs ausgewählten unter den acht gezogenen Blättern; Denn, daſs juſt drei, oder zwei, oder eins, oder 0 darunter ſind, iſt nicht möglich. Derowegen muſs die allgemeine Formel (§. 33.) nur drei mögliche Glieder geben. *Anm. des Ueberſ.*

§. 35.

ZUSATZ. 1. Wenn wiederum die Voraussetzungen bleiben, wie sie (§. 7.) gemacht worden sind; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder keiner oder wenigstens einer von den n ausgewählten Fällen, keiner aber an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird, =

$$\Big(1 \,.\, [1] \,.\, (m-n) \ldots\ldots (m-n-q+1)$$

$$+ n \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, q \\ -1 \end{array} \right\} (m-n) \ldots\ldots (m-n-q+2)$$

$$+ {}^{n}C \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (q-1)\, q \\ -2 \,.\, (q-1) \\ +1 \end{array} \right\} . (m-n) \ldots (m-n-q+3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 1 \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (q-n+1) \ldots\ldots q \\ -n \,.\, (q-n+1) \ldots (q-1) \\ +{}^{n}C \,.\, (q-n+1) \ldots (q-2) \\ -+ \ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} . (m-n) \ldots (m-q+1) \Big) :$$

$$m \ldots\ldots (m-q+1).$$

Denn der Zähler dieser Wahrscheinlichkeit ist offenbar die allgemeine Formel, welche in der Aufgabe §. 33. gefunden worden ist; und der Nenner: $m \ldots (m-q+1)$ (§. 2).

§. 36.

So ist für das (§. 34.) gegebene Beispiel, die Wahrscheinlichkeit, dass keine von den sechs ausgesonderten Karten an der ihr angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird $= \frac{982812}{1814400} = \frac{1901}{151200}$. *)

*) Nämlich die zehn gegebenen Karten seien z. B. 1. die rothe Zehn; 2. die grüne Neun; 3. die Schellen-Acht; 4. der rothe Unter; 5. der grüne Ober; 6. der Eichel-Unter; 7. der Schellen-König; 8. der grüne König; 9. das rothe Daus; 10. das grüne Daus; und man wähle hieraus Num. 1, 3, 5, 7, 9, 10 nach der Ordnung der dabei geschriebenen Nummern: so giebt

§. 37.

Wenn $n=q$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\Big\{1 \,.\, (1) \,.\, (m-q)\,(m-q-1) \ldots (m-2q+1)$$

$$+\, q \,.\, \binom{1.q}{-1} \,.\, (m-q) \ldots (m-2q+2)$$

$$+\, {}^{q}C \,.\, \left\{\begin{matrix} 1 \,.\, (q-1)\,q \\ -\,2\,(q-1) \\ +\,1 \end{matrix}\right\} .\, (m-q) \ldots (m-2q+3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\, 1 \,.\, \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2 \ldots q}\right) .\, 1.2 \ldots q \Big\} :$$

$$m\,(m-1)\,(m-2) \ldots (m-q+1).$$

Zum Beispiel. Von zehn verschiedenen Karten nenne man acht, eine nach der andern, indem man einer jeden davon eine bestimmte Stelle giebt, und ziehe blindlings hinter einander acht aus den gegebenen zehn Karten: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen sich keine von den acht genannten Karten an der für sie bestimmten Stelle befinden wird, =

$$\Big\{\frac{8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} \,.\, \left\{\begin{matrix} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\,6.3.4.5.6.7 \\ +\,15.3.4.5.6 \\ -\,20.3.4.5 \\ +\,15.3.4 \\ -\,6.3 \\ +\,1 \end{matrix}\right\} .\, 2.1 +$$

der Bruch $\frac{1001}{151200}$ die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens vier davon unter den acht gezogenen sein werden, aber keine von diesen vier oder fünf oder sechs herausgekommenen Karten an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein kommen wird.

Anm. d. Uebers.

$$8.\left\{\begin{array}{l} \quad 1.2.3.4.5.6.7.8 \\ -7.2.3.4.5.6.7 \\ +21.2.3.4.5.6 \\ -35.2.3.4.5 \\ +35.2.3.4 \\ -21.2.3 \\ +7.2 \\ -1 \end{array}\right\}.2$$

$$+1.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots.8}\right).1.2\ldots.8\Big\}:$$

$$10.9.8.7.6.5.4.3=\frac{818393}{1814400}.$$

§. 38.

Wenn $m=q$ ist, so wird die allgemeine Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad {}^nA.(m-n+1)\ldots.m \\ -{}^nB.(m-n+1)\ldots.(m-1) \\ +{}^nC.(m-n+1)\ldots.(m-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm{}^nA \end{array}\right\}:m(m-1)\ldots(m-n+1);$$

welches die obige (§. 30.) gefundene Formel ist.

Zum Beispiel. Wenn man von zehn verschiedenen Karten sechs, eine nach der andern nennet, einer jeden eine bestimmte Stelle anweiset, und alsdann die zehn gegebenen Karten, eine nach der andern, blindlings ziehet: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Herausziehen keine von den sechs genannten Karten an ihrer Stelle erscheinen wird, =

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1.5.6.7.8.9.10 \\ -6.5.6.7.8.9 \\ +15.5.6.7.8 \\ -20.5.6.7 \\ +15.5.6 \\ -6.5 \\ +1 \end{array}\right\}:10.9.8.7.6.5=\frac{81901}{151200}.$$

§. 39.

§. 39.

Für $m=q=n$ verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots m}$, welches die oben gefundene (§. 31.) ist.

§. 40.

Zusatz 2. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von der in §. 35. oder diejenige Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer von den n ausgesonderten Fällen an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird, ist

$$1 - \Big\{ 1.(1).(m-n)\ldots(m-n-q+1)$$

$$+ n.\binom{1.q}{-1}.(m-n)\ldots(m-n-q+2)$$

$$+ \frac{n.(n-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-1)q\\ -2.(q-1)\\ +1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1\left\{\begin{matrix}1.(q-n+1)\ldots\ldots q\\ -n.(q-n+1)\ldots(q-1)\\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-q+1)\Big\}:$$

$m\ldots(m-q+1)$. (§. 35. u. Kap. I. §. 15.).

Und wenn $n=q$, so ist diese Wahrscheinlichkeit

$$1 - [1.(1).(m-q)\ldots(m-2q+1)$$

$$+ q.\binom{1.q}{-1}.(m-q)\ldots(m-2q+2)$$

$$+ \frac{q.(q-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-1)q\\ -2.(q-1)\\ +1\end{matrix}\right\}.(m-q)\ldots(m-2q+3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots q}\right).1.2.3\ldots q]:$$

$m\ldots\ldots(m-q+1)$ (§. 37. u. Kap. I. §. 15).

Und für $m=q$ ist sie =

$$1-\left\{\begin{array}{l} 1.(m-n+1)\ldots\ldots m \\ -n.(m-n+1)\ldots\ldots(m-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(m-n+1)\ldots(m-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}:m\ldots(m-n+1).$$

(§. 38. und Kap. I. §. 15).

Endlich für $m=n=q$ ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots m}.\ (\text{§. 39.}).$$

Zum Beispiel. Wenn man dreizehn gegebene Karten, eine nach der andern, nennet, und bei jedem Blatte, das man nennet, eins von den dreizehn gegebenen Karten blindlings ziehet: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine von den gezogenen Karten diejenige sein wird, welche man nur genannt hat:

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}=\frac{109339663}{172972800}\ (\text{§}.31).$$

§. 41.*

Im Zahlen-Lotto besetzt man vier Nummern zu einer bestimmten Quaterne:

Num.	37	85	36	35
die	1ste	2te	4te	5te

Man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass 1) keine, 2) wenigstens eine, an der ihr angewiesenen Stelle herauskommt.

Hier iſt (§. 35.) $m = 90$, $n = 4$, $q = 5$ geſetzt, die Wahrſcheinlichkeit, daſs keine Nummer an der ihr angewieſenen Stelle herauskommt, =

$$
\begin{aligned}
&(1 \cdot [1] \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \\
&+ 4 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot 5 \\ -\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \\
&+ 6 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot 4 \cdot 5 \\ -\ 2 \cdot 4 \\ +\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \\
&+ 4 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ -\ 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ +\ 3 \cdot 3 \\ -\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot 86 \cdot 85 \\
&+ 1 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ -\ 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ +\ 6 \cdot 2 \cdot 3 \\ -\ 4 \cdot 2 \\ +\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot 86) : 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens eine an der ihr angewieſenen Stelle herauskommen wird

$$(\S.\ 40.) = 1 - \frac{1 \cdot (1) \cdot 86 \ldots 82 + \ldots + 1 \cdot (\ldots) \cdot 86}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

§. 42.

Aufgabe. *Es bleiben die Vorausſetzungen, wie ſie §. 7. gemacht worden ſind. Man ſucht die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter den q ſich begebenden Fällen juſt r von den n ausgeſonderten, ein jeder an ſeiner Stelle, und juſt t von den ausgeſonderten, keiner an ſeiner Stelle, ſich befinden werden.*

Auflösung. Den Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, weiſs man, daſs die Anzahl der Arten, auf welche aus n ausgeſonderten Fällen, r genommen werden können, um einen jeden Fall an die Stelle zu ſetzen, die ihm angewieſen worden,

folgende ist: $\frac{n \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r}$ (Kap. V. §. 2).

Wenn aber eine jede von diesen Arten bestimmt worden ist, so sind noch $m-r$ Fälle von der Menge aller übrig, und $q-r$ von denjenigen, welche sich noch ereignen sollen, und aus $n-r$ ausgesonderten Fällen soll man t nehmen, um einen jeden Fall anders wohin als an die ihm angewiesene Stelle zu setzen.

Wenn nun die Anzahl der gegebenen Fälle $m-r$ ist, $n-r$ die Anzahl der ausgesonderten, $q-r$ die Anzahl dererjenigen Fälle, welche sich ereignen sollen; so muss man, um zu finden, auf wie viel gleich mögliche Arten unter $q-r$ sich begebenden Fällen, just die Anzahl t von den $n-r$ ausgesonderten Fällen, keiner an seinem Orte sich ereignen soll, in der allgemeinen Formel §. 23. $\begin{array}{l|l|l|l} \text{anstatt } m & n & q & r \\ \text{setzen } m-r & n-r & q-r & t \end{array}$ wodurch sie sich verwandelt in

$$\frac{(n-r) \ldots (n-r-t+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (q-r-t+1) \ldots\ldots (q-r) \\ -t \,.\, (q-r-t+1) \ldots\ldots (q-r-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, (q-r-t+1) \ldots (q-r-2) \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} \times$$

$$.\, (m-n) \ldots\ldots (m-n-q+r+t+1)$$

Multiplicirt man diese jetzt herausgekommene Zahl mit $\frac{n \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r}$, so wird das herauskommende Produkt der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein. Uebrigens ist der Nenner derselben, wie bisher, $= m \ldots\ldots (m-q+1)$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{n(n-1) \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r} \,.\, \frac{(n-r) \ldots\ldots (n-r-t+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.(q-r-t+1)\ldots.(q-r) \\ -t.(q-r-t+1)\ldots.(q-r-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)}{m\ldots.(m-q+1)}.$$

W. Z. F.

§. 43.

Beispiel. Von zehn gegebenen verſchiedenen Karten ſpreche man ſechs hinter einander aus, indem man einer jeden davon eine beſtimmte Stelle anweiſet; hierauf ziehe man acht blindlings hinter einander aus den gegebenen zehn Karten. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter dieſen acht gezogenen Karten juſt drei von den ſechs ausgewählten, eine jede an ihrer Stelle, und juſt zwei von den ausgewählten, keine an ihrer Stelle, herauskommen werden?

Man ſetze in der vorigen allgemeinen Formel

anſtatt	m	q	n	r	t
hier	10	8	6	3	2

ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{3.2}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.4.5 \\ -2.4 \\ +1 \end{array}\right\}.\frac{4.3.2}{10.9\ldots.3}=\frac{13}{1260}.$$

§. 44.*

Für $m=n=q$, und alſo $t=m-r$, verwandelt ſich die allgemeine Formel in

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-r+1)}{1.2\ldots.r}.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots.(m-r)}\right).$$

Iſt auch $r=0$, ſo bekömmt man die Formel §. 31. nämlich

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots.\pm\frac{1}{1.2\ldots.m}.$$

Ist in der allgemeinen Formel (§. 42.) $r = 0$, so hat man die Formel des §. 25, nur mit dem Unterschied, daſs hier t anstatt r am a. O. gesetzt ist; nämlich die Wahrscheinlichkeit, daſs, wenn keiner von den ausgewählten Fällen sich an seinem Orte ereignet, unter den q sich begebenden just t von den n ausgewählten, keiner an seinem Orte, sich ereignen.

§. 45.*

Ist aber in der allgemeinen Formel (§. 42.) $t = 0$, so giebt sie den Ausdruk

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}\cdot\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots.(m-n-q+r+1)}{m(m-1)\ldots..(m-q+1)},$$

welcher die Wahrscheinlichkeit anzeigt, daſs wenn keiner von den ausgesonderten Fällen sich anders als an seiner Stelle ereignet, unter den q sich begebenden Fällen, just die Zahl r von den n ausgesonderten, ein jeder an seinem Orte sich befinden wird. Setzt man in dieser eben gefundenen Formel $n = q$, so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, daſs unter q sich begebenden bei eben so viel ausgesonderten Fällen, just r von den ausgesonderten, ein jeder an seinem Orte befindich ist:

$$\frac{n\ldots.(n-r+1)}{1\ldots.r}\cdot\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+r+1)}{m\ldots.(m-n+1)}.$$

Ist $t = 0$ und $n = r$, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 42.) in

$$\frac{(m-n)\ldots.(m-q+1)}{m\ldots..(m-q+1)} = \frac{1}{m\ldots.(m-n+1)}.$$

Also hat hier die Gröſse von q in die Wahrscheinlichkeit keinen Einfluſs.

Wenn $t = 0$ und $q = n = r$ ist, so giebt die allgemeine Formel (§. 42.) $\frac{1}{m\ldots.(m-q+1)}$; wie eben zuvor.

Ist $t=0$, $m=q$ und $r=n$, so giebt ebendieselbe
$$\frac{(m-n)\ldots.2.1}{m\ldots..2.1}=\frac{1}{m\ldots.(m-n+1)}$$; wie vorhin.

Wenn aber $t=0$, und $m=q=n=r$ ist; so hat man
$$\frac{1}{1.2\ldots.m}.$$

Die Bedeutung dieser Formeln wird man verstehen. Daher wir nur die letzte durch folgendes Beispiel erläutern wollen.

Beispiel. Von dreizehn gegebenen verschiedenen Karten ziehet man eine nach der andern, und vor jedem Zuge nennet man eine derselben; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass allezeit die unmittelbar zuvor genannte herausgezogen werden wird, $=\frac{1}{1.2.3\ldots.11.12.13}=\frac{1}{6227020800}$.

Ist endlich in der allgemeinen Formel (§. 42.) $t=0$ und $r=0$, so giebt sie $\frac{(m-n)\ldots.(m-n-q+1)}{m\ldots.(m-q+1)}$ (Man sehe §. 32.)

§. 46.*

Man hat zwei Nummern des Lotto zu einer bestimmten Ambe besetzt, und verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, dass sie beide, jede an ihrer Stelle, herauskommen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide, aber keine an ihrer Stelle herauskommen, ist $=\frac{13}{8010}$ (§. 18). Die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine an ihrer Stelle, und die andere nicht an ihrer Stelle herauskommt, findet man, wenn man in der allgemeinen Formel (§. 42.) $m=90$, $n=2$, $q=5$, $r=1$, $t=1$ setzt; also ist diese

Wahrscheinlichkeit $= 2 . \binom{1.4}{-1} . \frac{88....86}{90....86} = \frac{6}{90.89} = \frac{6}{8010}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine Nummer herauskommt, sie mag nun an ihrer Stelle oder nicht an ihrer Stelle herauskommen, ist (Kap. V. §. 14. $m = 90$, $q = 5$, $n = 2$, $r = 1$ gesetzt) =

$$2 . \frac{88....85}{1.2.3.4} : \frac{90.....86}{1.2.3.4.5} = \frac{2.85.5}{90.89} = \frac{850}{8010}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine herauskommt, ist (Kap. V. §. 17. $m = 90$, $q = 5$, $n = 2$ gesetzt) $= \frac{88....84}{90....86} =$ $\frac{85 . 84}{90 . 89} = \frac{7140}{8010}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{13}{8010} - \frac{6}{8010} - \frac{850}{8010} - \frac{7140}{8010} = 1 - \frac{8009}{8010} = \frac{1}{8010}$. (S. §. 18.)

§. 47.

Aufgabe. *Es bleiben die Voraussetzungen, wie sie §. 7. gemacht worden sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter q sich begebenden Fällen just t von den ausgesonderten, nicht an ihrer Stelle, und wenigstens r von den ausgesonderten an ihrer Stelle sich ereignen werden?*

Auflösung. Man setze in der allgemeinen Formel (§. 42.) anstatt r nach und nach die Zahlen r, $r + 1$, $r + 2$, etc. bis $n - t$, und addire die gefundenen Wahrscheinlichkeiten: dass just r, oder $r + 1$, oder $r + 2$, oder...., oder $n - t$ von den ausgesonderten Fällen an ihrer Stelle, und just t von denselben nicht an ihrer Stelle zum Vorschein kommen werden, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\left(\frac{(n-r)\dots(n-r-t+1)}{1\cdot2\dots t}\cdot\begin{Bmatrix}1\cdot(q-r-t+1)\dots(q-r)\\ -t\cdot(q-r-t+1)\dots(q-r-1)\\ +{}^tC(q-r-t+1)\dots(q-r-2)\\ -+\dots\dots\dots\\ \pm1\end{Bmatrix}\times\right.$$

$${}^rR\cdot(m-n)\dots(m-n-q+r+t+1)$$

$$+\frac{(n-r-1)\dots(n-r-t)}{1\cdot2\dots t}\cdot\begin{Bmatrix}1\cdot(q-r-t)\dots(q-r-1)\\ -t\cdot(q-r-t)\dots(q-r-2)\\ +{}^tC(q-r-t)\dots(q-r-3)\\ -+\dots\dots\dots\\ +1\end{Bmatrix}\times$$

$${}^n[R+1]\cdot(m-n)\dots(m-n-q+r+t+2)$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{t\dots2\cdot1}{1\cdot2\dots t}\cdot\begin{Bmatrix}1\cdot(q-n+1)\dots(q-n+t)\\ -t\cdot(q-n+1)\dots(q-n+t-1)\\ +{}^tC\cdot(q-n+1)\dots(q-n+t-2)\\ -+\dots\dots\dots\\ \pm1\end{Bmatrix}\times$$

$$\left.{}^n[N-T]\cdot(m-n)\dots(m-q+1)\right):m\dots(m-q+1).$$

W. Z. F.

§. 48.

Zum Beiſpiel. Aus zwölf gegebenen Karten wähle man acht, indem man einer jeden eine beſtimmte Stelle anweiſet; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter zehn aus den zwölf gegebenen blindlings herausgezogenen Karten, juſt zwei von den acht ausgewählten, keine an ihrer Stelle, und wenigſtens vier von den ausgewählten, eine jede an ihrer Stelle befindlich ſein werden, gefunden, wenn man in der vorigen allgemeinen Formel $m=12$, $q=10$, $n=8$, $t=2$, $r=4$ ſetzt =

$$\left(\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\begin{Bmatrix}1\cdot5\cdot6\\ -2\cdot5\\ +1\end{Bmatrix}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+\right.$$

$$\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot4\cdot5\\-2\cdot4\\+1\end{matrix}\right\}\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot4\cdot3\cdot2+$$

$$\frac{2\cdot1}{1\cdot2}\left\{\begin{matrix}1\cdot3\cdot4\\-2\cdot3\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot4\cdot3\Big):12\cdot11\ldots3=\frac{793}{12800}.$$

§. 49.

AUFGABE. *Unter ebendenselben Voraussetzungen, welche in der vorhergehenden Aufgabe und § 7. gemacht worden sind; die Wahrscheinlichkeit zu finden, daſs unter den q sich ereignenden Fällen just t von den ausgesonderten, keiner an seiner Stelle, und höchstens r von den ausgesonderten, ein jeder an seiner Stelle, sich befinden werden.*

AUFLÖSUNG. Man setze in der allgemeinen Formel §. 42. anstatt r die Zahlen 0, 1, 2....r, und addire die herausgekommenen Produkte; so ist die Summe die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\left(\frac{n\ldots\ldots(n-t+1)}{1\cdot2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot(q-t+1)\ldots\ldots q\\-t\cdot(q-t+1)\ldots\ldots(q-1)\\+{}^tC\cdot(q-t+1)\ldots\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{matrix}\right\}\times\right.$$

$$(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+t+1)+$$

$$\frac{(n-1)\ldots\ldots(n-t)}{1\cdot2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot(q-t)\ldots\ldots(q-1)\\-t\cdot(q-t)\ldots\ldots(q-2)\\+{}^tC\cdot(q-t)\ldots\ldots(q-3)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{matrix}\right\}\times$$

$$n\cdot(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+t+2)+$$

$$\frac{(n-2)\ldots\ldots(n-t-1)}{1\cdot2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot(q-t-1)\ldots\ldots(q-2)\\-t\cdot(q-t-1)\ldots\ldots(q-3)\\+{}^tC\cdot(q-t-1)\ldots\ldots(q-4)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{matrix}\right\}\times$$

$$ {}^nC.(m-n)\ldots(m-n-q+t+3)+ $$

$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + $$

$$ \frac{(n-r)\ldots(n-r-t+1)}{1.2\ldots t}.\left\{\begin{matrix} 1.(q-r-t+1)\ldots(q-r) \\ -t.(q-r-t+1)\ldots(q-r-1) \\ +{}^tC.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}\times $$

$$ {}^nR\ (m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)\Big) : m\ldots(m-q+1). $$

W. Z. F.

§. 50.

Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, daſs, wenn zwölf ($=m$) Karten gegeben ſind, unter zehn ($=q$) davon gezogenen juſt zwei ($=t$) von acht ($=n$) ausgeſonderten nicht an ihrer Stelle, und höchſtens drei ($=r$) von den acht ausgeſonderten an ihrer Stelle befindlich ſein werden, iſt =

$$ \Bigg(\frac{8.7}{1.2}.\left\{\begin{matrix} 1.9.10 \\ -2.9 \\ +1 \end{matrix}\right\}.1.4.3.2.1.0.-1.-2.-3+ $$

$$ \frac{7.6}{1.2}.\left\{\begin{matrix} 1.8.9 \\ -2.8 \\ +1 \end{matrix}\right\}.8.4.3.2.1.0.-1.-2+ $$

$$ \frac{6.5}{1.2}.\left\{\begin{matrix} 1.7.8 \\ -2.7 \\ +1 \end{matrix}\right\}.\frac{8.7}{1.2}.4.3.2.1.0.-1+ $$

$$ \frac{5.4}{1.2}.\left\{\begin{matrix} 1.6.7 \\ -2.6 \\ +1 \end{matrix}\right\}.\frac{8.7.6}{1.2.3}.4.3.2.1.0\Bigg) : 12\ldots3=0, $$

hieraus erſiehet man, daſs die verlangte Begebenheit unmöglich iſt.

§. 51.

Wenn man in den allgemeinen Formeln, die in den Aufgaben §. 45, 47 und 49 gefunden worden, $t=0$ ſetzt, ſo erhält man

1.

$$\frac{n \ldots. (n-r+1)}{1.2 \ldots. r} \cdot \frac{(m-n) \ldots. (m-n-q+r+1)}{m \ldots\ldots (m-q+1)};$$

2.

$$\Big(\frac{n \ldots. (n-r+1)}{1.2 \ldots. r} . (m-n) \ldots. (m-n-q+r+1) +$$

$$\frac{n \ldots. (n-r)}{1.2 \ldots. (r+1)} . (m-n) \ldots\ldots (m-n-q+r+2) +$$

$$\frac{n \ldots. (n-r-1)}{1.2 \ldots. (r+2)} . (m-n) \ldots. (m-n-q+r+3) + \ldots. +$$

$$1 . (m-n) \ldots. (m-q+1)\Big) : m \ldots. (m-q+1);$$

3.

$$\Big(1 . (m-n) \ldots. (m-n-q+1) + n . (m-n) \ldots. (m-n-q+2)$$

$$+ {}^{n}C (m-n) \ldots. (m-n-q+3) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ {}^{n}R . (m-n) \ldots. (m-n-q+r+1)\Big) : m \ldots. (m-q+1);$$

welches die Wahrſcheinlichkeiten ſind, daſs, wenn keiner von den ausgeſonderten Fällen ſich anders als an der ihm angewieſenen Stelle ereignet; unter den q ſich ereignenden Fällen, die Anzahl r {juſt / wenigſtens / höchſtens} von den n ausgeſonderten Fällen, ein jeder an der ihm angewieſenen Stelle ſich befinden wird.

Und wenn man in dem erſten dieſer Ausdrüke für r alle ganze Zahlen von o bis n ſetzt, ſo hat man

4.

$$\Big(1 . (m-n) \ldots\ldots (m-n-q+1) +$$

$$n . (m-n) \ldots. (m-n-q+2) +$$

$${}^{n}C . (m-n) \ldots. (m-n-q+3) +$$

$${}^{n}D . (m-n) \ldots. (m-n-q+4) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$1 \cdot (m-n) \ldots (m-q+1)\big) : m \ldots (m-q+1)$;
für die Wahrscheinlichkeit, dass kein Fall von den ausgesonderten Fällen sich anders als an der ihm angewiesenen Stelle ereignen wird; (oder, dass entweder kein Fall von den n ausgesonderten Fällen, oder wenigstens einer davon an der ihm angewiesenen Stelle, zum Vorschein kommen wird).

§. 52.

Aufgabe. *Wenn die Voraussetzungen bleiben, wie sie in den vorhergehenden Aufgaben gemacht worden sind; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass unter den q sich ereignenden Fällen just r von den n ausgewählten, ein jeder an der ihm angewiesenen Stelle, und* $\left\{\begin{matrix}\textit{wenigstens}\\ \textit{höchstens}\end{matrix}\right\}$ *t von den n ausgewählten, keiner an der ihm angewiesenen Stelle, vorhanden sein werden.*

Auflösung. 1. Man setze in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe §. 42. gefunden worden ist, anstatt t alle ganze Zahlen von t, $t+1$, $t+2$, bis $n-r$; so erhält man für den ersten Fall die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{{}^nR}{m \ldots (m-q+1)} \cdot \Big({}^{n-r}T \cdot (m-n) \ldots (m-n-q+r+t+1) \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \cdot (q-r-t+1) \ldots (q-r) \\ -t\,(q-r-t+1) \ldots (q-r-1) \\ +{}^tC \cdot (q-r-t+1) \ldots (q-r-2) \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}$$

$$+{}^{n-r}[T+1] \cdot (m-n) \ldots (m-n-q+r+t+2) \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \cdot (q-r-t) \ldots (q-r) \\ -(t+1) \cdot (q-r-t) \ldots (q-r-1) \\ +{}^{t+1}C \cdot (q-r-t) \ldots (q-r-2) \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$+(m-n)\ldots(m-q+1).\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1)\ldots(q-r)\\-(n-r).(q-n+1)\ldots(q-r-1)\\+{}^{n-r}C.(q-n+1)\ldots(q-r-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}\Bigg)$$

2.

In eben dieser allgemeinen Formel, welche §. 42. gefunden worden ist, setze man anstatt t alle ganze Zahlen von 0 bis t; so bekömmt man für den zweiten Fall die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{{}^{n}R}{m\ldots\ldots(m-q+1)}\times$$

$$\Big(1.[1].(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+1)+$$

$$(n-r).\begin{bmatrix}1.(q-r)\\-1\end{bmatrix}.(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+2)+$$

$${}^{n-r}C.\left\{\begin{array}{l}1.(q-r-1)(q-r)\\-2.(q-r-1)\\+1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$${}^{n-r}T.\left\{\begin{array}{l}1.(q-r-t+1)\ldots(q-r)\\-t.(q-r-t+1)\ldots(q-r-1)\\+{}^{t}C.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)\Big)$$

§. 53.

Wenn man in den allgemeinen Formeln, die §. 42. und §. 52. gefunden worden sind, $r=0$ setzt, so erhält man

1.

$$\frac{n\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots t}.\left\{\begin{array}{l}1.(q-t+1)\ldots\ldots q\\-t.(q-t+1)\ldots\ldots(q-1)\\+\dfrac{t.(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+t+1)}{m\ldots\ldots(m-q+1)};$$

2.

$$\Big(\frac{n\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots t}.(m-n)\ldots(m-n-q+t+1)\times$$

$$\left\{\begin{matrix} 1.(q-t+1)\ldots q \\ -t.(q-t+1)\ldots(q-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\} +$$

$$\frac{n\ldots(n-t)}{1.2\ldots(t+1)}.(m-n)\ldots(m-n-q+t+2)\times$$

$$\left\{\begin{matrix} 1.(q-t)\ldots q \\ -(t+1).(q-t)\ldots(q-1) \\ +\frac{(t+1)t}{1.2}.(q-t)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$1.(m-n)\ldots(m-q+1)\times$$

$$\left\{\begin{matrix} 1.(q-n+1)\ldots q \\ -n.(q-n+1)\ldots(q-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}\Big) : m\ldots(m-q+1).$$

3.

$$\Big(1.[1].(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+1)+$$

$$n.\left\{\begin{matrix} 1.q \\ -1 \end{matrix}\right\}(m-n)\ldots(m-n-q+2)+$$

$$\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left\{\begin{array}{l}1.(q-1)\,q\\-2.(q-1)\\+1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\pm$$

$$\frac{n\ldots.(n-t+1)}{1.2\ldots.t}.\left\{\begin{array}{l}1\,(q-t+1)\ldots.q\\-t.(q-t+1)\ldots.(q-1)\\+\frac{t\,(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots.(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.$$

$$(m-n)\ldots.(m-n-q+t+1)\Big):m\ldots.(m-q+1)$$

welches die Wahrscheinlichkeiten sind, daſs, wenn keiner von den ausgesonderten Fällen sich an der ihm angewiesenen Stelle ereignet, unter den q sich begebenden Fällen die Anzahl t $\left\{\begin{array}{l}\text{just}\\\text{wenigstens}\\\text{höchstens}\end{array}\right\}$ von den n ausgesonderten Fällen, keiner an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird.

Und wenn man in der ersten von diesen Formeln nach und nach für t alle ganze Zahlen von 0 bis n substituirt; so bekömmt man 4. die bereits (§. 35.) gefundene Formel für die Wahrscheinlichkeit, daſs keiner von den ausgesonderten Fällen an dem ihm angewiesenen Orte sich ereignen werde.

§. 54.

1) Wenn man in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe (§. 47.) gefunden worden, für t nach und nach alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{array}{l}t\\0\end{array}\right.$ bis $\left.\begin{array}{l}(n-r)\\t\end{array}\right\}$ setzt, und alle Produkte, welche auf diese Weise entstehen, zusammen addirt: so bekömmt man zur Summe die Wahrscheinlichkeit, daſs unter denjenigen q Fällen, wel-

welche ſich ereignen, $\left\{\begin{matrix}\text{wenigſtens}\\ \text{höchſtens}\end{matrix}\right\}$ t von den n ausgeſonderten befindlich ſein werden, ein jeder an einer andern Stelle als die ihm angewieſen worden; und wenigſtens r von den n ausgeſonderten, ein jeder an dem Orte, welcher ihm angewieſen worden iſt.

2) Setzt man in der allgemeinen Formel, welche §. 49. gefunden worden iſt, nach und nach anſtatt t alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix}t & \text{bis} & n\\ 0 & & t\end{matrix}\right\}$, und ſummirt die ſolchergeſtalt herausgekommenen Produkte: ſo wird dieſe Summe die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs unter den q Fällen, welche ſich ereignen, ſich $\left\{\begin{matrix}\text{wenigſtens}\\ \text{höchſtens}\end{matrix}\right\}$ t von den n ausgeſonderten, keiner an dem ihm angewieſenen Orte; und höchſtens r von den n ausgeſonderten, ein jeder an dem ihm angewieſen Orte, befinden werden.

Man wird ebendieſelben Wahrſcheinlichkeiten erhalten, wenn man in der erſten Formel der Aufgabe §. 52. nach und nach anſtatt r alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix}r & \text{bis} & n-t\\ 0 & & r\end{matrix}\right\}$ ſubſtituirt, und hierauf alle dieſe Produkte zuſammen addirt: und wenn man in der zweiten Formel eben dieſer Aufgabe (§. 52.) nach und nach für r alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix}r & \text{bis} & n\\ 0 & & r\end{matrix}\right\}$ ſetzt, und die gefundenen Produkte ſummirt.

§. 55.

Aufgabe. *Es bleiben die Vorausſetzungen, wie in den vorhergehenden Aufgaben. Man ſoll die Wahrſcheinlichkeit finden, daſs juſt t von den n ausgeſonderten Fällen nicht an ihrer Stelle ſich ereignen werden.*

Auflösung. Man erhält die geſuchte Wahrſcheinlichkeit, wenn man in der allgemeinen Formel des §. 42. anſtatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 0 bis $n-t$

setzt, und die gefundenen einzelnen Wahrscheinlichkeiten in eine Summe bringt, =

$$\Big(1.\frac{n\ldots.(n-t+1)}{1.2\ldots.t}.\left\{\begin{array}{l} 1\,(q-t+1)\ldots.q \\ -t.(q-t+1)\ldots.(q-1) \\ +\frac{t\,(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots.(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots.(m-n-q+t+1)+$$

$$n.\frac{(n-1)\ldots.(n-t)}{1.2\ldots\ldots t}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-t)\ldots.(q-1) \\ -t.(q-t)\ldots.(q-2) \\ +\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-t)\ldots(q-3) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots.(m-n-q+t+2)+\ldots.+$$

$$\frac{n\ldots.(t+1)}{1.2\ldots(n-t)}.1.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots.(q-n+t) \\ -t.(q-n+1)\ldots.(q-n+t-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots.(q-n+t-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots\ldots\ldots(m-q+1)\Big):m\ldots.(m-q+1).$$

W. Z. F.

§. 56.

Wenn man in der eben (§. 55.) gefundenen allgemeinen Formel anstatt t nach und nach alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix}\right.$ bis $\left.\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}\right\}$ setzt, und alle durch diese Substitutionen erhaltenen Produkte in eine Summe bringt: so ist diese Summe die Wahrscheinlichkeit, dass bei q sich be-

gebenden Fällen $\begin{bmatrix}\text{wenigstens}\\ \text{höchstens}\end{bmatrix}$ *t* von den *n* ausgesonderten nicht an ihrem Orte sich ereignen werden.

§. 57.

Aufgabe. *Es bleiben ebendieselben Voraussetzungen, welche in den vorhergehenden Aufgaben gemacht worden sind: man sucht die Wahrscheinlichkeit, daſs just r von den n ausgesonderten Fällen an ihrer Stelle sich ereignen werden.*

Auflösung. Man setze in der allgemeinen Formel (§. 42.) nach und nach für *t* alle ganze Zahlen von 0 bis $n-r$, und addire alle Produkte, welche durch diese Substitution erhalten werden; so ist die Summe derselben die verlangte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{n\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\Big(1.[1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+1)$$

$$+(n-r).\begin{bmatrix}1.(q-r)\\ -1\end{bmatrix}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+2)$$

$$+\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}.\begin{Bmatrix}1.(q-r-1)(q-r)\\ -2.(q-r-1)\\ +1\end{Bmatrix}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\begin{Bmatrix}1.(q-n+1)\ldots(q-r)\\ -(n-r).(q-n+1)\ldots(q-r-1)\\ +\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-r-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{Bmatrix}\times$$

$$(m-n)\ldots\ldots(m-q+1)\Big):m\ldots(m-q+1).$$

§. 58.

Aufgabe. *Bei den nämlichen Voraussetzungen, welche in den vorhergehenden Aufgaben gemacht worden sind, verlangt man die Wahrscheinlichkeit zu wissen, daſs sich*

wenigſtens r von den ausgeſonderten Fällen, ein jeder an der ihm angewieſenen Stelle, ereignen werden.

Auflösung. In der allgemeinen Formel, welche im vorhergehenden §. 57. gefunden worden iſt, ſetze man nach und nach anſtatt r alle ganze Zahlen von r bis n, und addire die vermittelſt dieſer Subſtitutionen herausgekommenen Produkte; ſo iſt die Summe derſelben die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{n\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}.\Big[1.[1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+1)+$$

$$(n-r).\left\{\begin{matrix}1.(q-r)\\-1\end{matrix}\right\}(m-n)\ldots(m-n-q+r+2)+$$

$$\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-r-1)(q-r)\\-2.(q-r-1)\\+1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.(q-n+1)\ldots(q-r)\\-(n-r)(q-n+1)\ldots(q-r-1)\\+\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}(q-n+1)\ldots(q-r-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{matrix}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots(m-q+1)\Big]$$

$$+\frac{n\ldots(n-r)}{1.2\ldots(r+1)}.\Big[1.[1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+2)+$$

$$(n-r-1)\left\{\begin{matrix}1.(q-r-1)\\-1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\frac{(n-r-1)(n-r-2)}{1.2}.\left[\begin{matrix}1.(q-r-2)(q-r-1)\\-2(q-r-2)\\+1\end{matrix}\right]\times$$

$$(m-n)\ldots(m-n-q+r+4)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots.(q-r-1) \\ -(n-r-1).(q-n+1)\ldots.(q-r-2) \\ +\frac{(n-r-1)(n-r-2)}{1\;.\;2}.(q-n+1)\ldots.(q-r-3) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \end{array}\right\} \times$$

$$(m-n)\ldots.(m-q+1)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\;.\;2}.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-q-1) +$$

$$2.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+2)\\ -1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q) +$$

$$1.\left[\begin{array}{l}1.(q-n+1)(q-n+2)\\ -2.(q-n+1)\\ +1\end{array}\right].(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]$$

$$+n.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-q) +$$

$$1.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1\\ -1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]$$

$$+1.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]\Big):m\ldots.(m-q+1).$$

§. 59.

AUFGABE. *Unter den bisherigen Vorausſetzungen ſucht man die Wahrſcheinlichkeit, daſs höchſtens r von den ausgeſonderten Fällen, ein jeder an der ihm angewieſenen Stelle, ſich ereignen werden.*

AUFLÖSUNG. In der (Aufgabe §. 57.) gefundenen allgemeinen Formel ſubſtituire man nach und nach für r alle ganze Zahlen von 0 bis r, und addire die Produkte, welche durch dieſe Subſtitutionen erhalten werden; ſo hat man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\Big(1\Big\{1.(1).(m-n)\ldots.(m-n-q+1)+$$

$$n\left(\begin{array}{l}1.q\\ -1\end{array}\right).(m-n)\ldots.(m-n-q+2)+$$

$$\frac{n.(n-1)}{1\ .\ 2}.\left\{\begin{array}{l}1.(q-1)\,q\\-2.(q-1)\\+1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-n-q+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1)\ldots\ldots q\\-n.(q-n+1)\ldots.(q-1)\\+\dfrac{n.(n-1)}{1\ .\ 2}.(q-n+1)\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big\}$$

$$\mp n.\left[\begin{array}{l}1.[1].(m-n)\ldots.(m-n-q+2)\quad+\\(n-1).\left[\begin{array}{l}1.(q-1)\\-1\end{array}\right].(m-n)\ldots.(m-n-q+3)+\\\dfrac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2}.\left[\begin{array}{l}1.(q-2)(q-1)\\-2.(q-2)\\+1\end{array}\right].(m-n)\ldots(m-n-q+4)+\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\1.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1)\ldots.(q-1)\\-(n-1).(q-n+1)\ldots.(q-2)\\+\dfrac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2}.(q-n+1)\ldots(q-3)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q+1)\end{array}\right]$$

$$\mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mp\frac{n\ldots.(n-r+1)}{1.2\ldots.r}.\left[\begin{array}{l}1.[1].(m-n)\ldots.(m-n-q+r+1)+\\(n-r).\left[\begin{array}{l}1.(q-r)\\-1\end{array}\right].(m-n)\ldots.(m-n-q+r+2)+\\\dfrac{(n-r).(n-r-1)}{1\ .\ 2}.\left[\begin{array}{l}1.(q-r-1)(q-r)\\-2.(q-r-1)\\+1\end{array}\right].(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\end{array}\right.$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots.(q-r) \\ -(n-r).(q-n+1)\ldots.(q-r-1) \\ +\frac{(n-r)(n-r-1)}{1\;.\;2}.(q-n+1)\ldots.(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\times$$

$$\left.(m-n)\ldots.(m-q+1)\right]\Big):m\ldots\ldots(m-q+1).$$

§. 60.

Beispiel. Aus zehn verſchiedenen Karten, davon acht gezogen werden ſollen, wählt man ſechs, ſo daſs einer jeden davon eine beſtimmte Stelle angewieſen wird. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs juſt vier an ihrer Stelle zum Vorſchein kommen werden?

In der §. 57. gefundenen allgemeinen Formel ſetze man $m=10$, $q=8$, $n=6$ und $r=4$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\Big\{1.(1).4.3.2.1+$$

$$2.\binom{1.4}{-1}.4.3.2+1.\begin{bmatrix} 1.3.4 \\ -2.3 \\ +1 \end{bmatrix}.4.3\Big\}:10.9.8.7.6.5.4.3=$$

$$\frac{3780}{1814400}=\frac{1}{480}.$$

Wie groſs wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs unter den acht gezogenen Karten wenigſtens vier von den ausgewählten ſein werden, und zwar eine jede an dem Orte, welcher ihr angewieſen worden iſt? Um dieſe Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, mache man ebendieſelben Subſtitutionen, wie vorher, in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe §. 58. gefunden worden; alſo iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\left\{\frac{6.5}{1.2}\cdot\left[1.(1).4.3.2.1+2.\begin{pmatrix}1.4\\-1\end{pmatrix}.4.3.2+1.\begin{bmatrix}1.3.4\\-2.3\\+1\end{bmatrix}.4.3\right]\right.$$

$$+6.[1.(1).4.3.2+1.\begin{pmatrix}1.3\\-1\end{pmatrix}.4.3]$$

$$\left.+1.[1.(1).4.3]\right\}:10.9.8.7.6.5.4.3=\frac{3780+288+12}{1814400}=\frac{85}{37800}.$$

Was ist endlich die Wahrscheinlichkeit, daſs unter den acht gezogenen Karten sich höchstens drei von den ausgewählten befinden werden, eine jede an dem Orte, welcher ihr angewiesen worden? Die nämlichen Substitutionen wie vorher (ausgenommen für r, welches hier $=3$ ist) macht man in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe (§. 59.) gefunden worden ist; man bekömmt also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\Bigg(1.[15.\left\{\begin{matrix}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{matrix}\right\}.4.3.2.1+$$

$$6.\left\{\begin{matrix}1.4.5.6.7.8\\-5.4.5.6.7\\+10.4.5.6\\-10.4.5\\+5.4\\-1\end{matrix}\right\}.4.3.2+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.3.4.5.6.7.8\\-6.3.4.5.6.7\\+15.3.4.5.6\\-20.3.4.5\\+15.3.4\\-6.3\\+1\end{matrix}\right\}.4.3]$$

$$+6.\left[10.\left[\begin{array}{l}1.5.6.7\\-3.5.6\\+3.5\\-1\end{array}\right].4.3.2.1+\right.$$

$$5.\left[\begin{array}{l}1.4.5.6.7\\-4.4.5.6\\+6.4.5\\-4.4\\+1\end{array}\right].4.3.2+$$

$$\left.1.\left[\begin{array}{l}1.3.4.5.6.7\\-5.3.4.5.6\\+10.3.4.5\\-10.3.4\\+5.3\\-1\end{array}\right].4.3\right]$$

$$+15.\left[6.\left[\begin{array}{l}1.5.6\\-2.5\\+1\end{array}\right].4.3.2.1+\right.$$

$$4.\left[\begin{array}{l}1.4.5.6\\-3.4.5\\+3.4\\-1\end{array}\right].4.3.2+$$

$$\left.1.\left[\begin{array}{l}1.3.4.5.6\\-4.3.4.5\\+6.3.4\\-4.3\\+1\end{array}\right].4.3\right]$$

$$+20\left[3.\left\{\begin{array}{l}1.5\\-1\end{array}\right\}.4.3.2.1+\right.$$

$$3.\left\{\begin{array}{l}1.4.5\\-2.4\\+1\end{array}\right\}.4.3.2+$$

$$\left.1.\left\{\begin{array}{l}1.3.4.5\\-3.3.4\\+3.3\\-1\end{array}\right\}.4.3\right]\Big):10.9.8.7.6.5.4.3$$

$$= \frac{982182 + 615168 + 180180 + 32160}{1814400} = \frac{37715}{37800}.$$

§. 61.*

Aus einem Piketſpiel wählt man vier Blätter in einer beſtimmten Ordnung aus, nämlich Pik-As die dritte, Tref-König die fünfte, Koeur-Dame die ſiebente, Kareau-Bube die zehnte. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter zehn gezogenen wenigſtens zwei von den ausgewählten, nämlich entweder Pik-As die dritte und Tref-König die fünfte, oder Pik-As die dritte und Koeur-Dame die ſiebente, oder Pik-As die dritte und Kareau-Bube die zehnte, oder Tref-König die fünfte und Koeur-Dame die ſiebente, oder Tref-König die fünfte und Kareau-Bube die zehnte, oder Koeur-Dame die ſiebente und Kareau-Bube die zehnte, an ihrer Stelle ſich befinden werden?

Man ſetze (§. 58.) $m = 32$, $n = 4$, $q = 10$, $r = 2$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\Bigg(\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \Big\{1 \cdot [1]\, 28 \cdot 27 \ldots 21 + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 8 \\ -1 \end{bmatrix} 28 \cdot 27 \ldots 22 +$$

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 \cdot 8 \\ -2 \cdot 7 \\ +1 \end{bmatrix} \cdot 28 \cdot 27 \ldots 23 \Big\}$$

$$+ 4 \cdot [1 \cdot (1) \cdot 28 \ldots 22 + 1 \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 28 \ldots 23]$$

$$+ 1 \cdot [1 \cdot (1) \cdot 28 \ldots 23] \Bigg) : 32 \ldots 23. \quad (\text{S. §. 1})$$

§. 62.*

Man ſoll vier Stük aus 32 Karten ziehen. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs man alle vier Könige, und zwar in folgender Ordnung: Eicheln, Roth, Schelln, und Grün, trifſt?

Man setze in dem allgemeinen Ausdruk $\frac{1}{m \ldots (m-q+1)}$ (§. 45.) $m=32$, $q=4$, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{1}{32.31.30.29} = \frac{1}{863040}.$$

Für $q=5$ bis 32 ist die Wahrscheinlichkeit eben so gross (ebendaselbst).

Kapitel VII.

Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten bei mehrern Versuchen.

§. 1.

Es mag eine bestimmte Begebenheit bestehen in dem Geschehen eines einzigen aus den Fällen, die von einem gegebenen Zustande abhängen; oder einer gewissen Anzahl solcher Fälle, die sich entweder zugleich oder hinter einander in jeder beliebigen Ordnung ereignen soll; oder einer Anzahl, die hinter einander in einer vorgeschriebenen Ordnung sich zutrage; es mag endlich die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit einfach, oder aus mehrern andern Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzt sein: so kann die Wahrscheinlichkeit derselben immer durch den allgemeinen Ausdruk $\frac{n}{m}$ vorgestellet werden, worin der Nenner m die Anzahl aller Fälle, und der Zähler n die Anzahl derer, welche die bestimmte Begebenheit geben, anzeigt. Bei allen diesen Voraussetzungen giebt es nun folgende zwei Fälle: entweder die Handlung, von welcher die bestimmte Begebenheit abhängt, hat nur ein einziges mal statt; für diesen Fall haben wir in den vorhergehenden Kapiteln die

Wahrſcheinlichkeit nach einer allgemeinen Methode zu finden angewieſen: oder die Handlung, wovon die Begebenheit abhängt, wird mehrmal wiederholet, oder welches einerlei iſt, es giebt eine Anzahl x, Verſuche dieſer Handlung (Kap. I. §. 16.); es kommt darauf an, für dieſen zweiten Fall die Wahrſcheinlichkeit der beſtimmten Begebenheit anzugeben, davon die Wahrſcheinlichkeit in einem einzigen Verſuche durch $\frac{n}{m}$ vorgeſtellet wird: welches in dem gegenwärtigen Kapitel geſchehen ſoll.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn m die Anzahl der Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, in einem Verſuche bedeutet: ſo iſt die Menge der Fälle, die von eben dieſer Handlung, Bewegung, oder ebendemſelben Zuſtande abhängen, in x Verſuchen $= m^x$.*

Beweis. Wenn man annimmt, daſs nur zwei Verſuche ſein ſollen; ſo kann ein jeder von den m gegebenen Fällen im erſten Verſuche ſich ereignen; und welcher Fall auch im erſten Verſuche ſich ereignen mag, ſo kann dazu ein jeder von den m gegebenen Fällen im zweiten Verſuche ſich ereignen. Sind alſo a, b, c, d, — die m gegebenen Fälle, ſo laſſen ſich alle möglichen Fälle bei zwei Verſuchen, durch die Glieder folgender Tafel darſtellen, deren Anzahl m^2 iſt.

a a	*b a*	*c a*	*d a*	—
a b	*b b*	*c b*	*d b*	—
a c	*b c*	*c c*	*d c*	—
a d	*b d*	*c d*	*d d*	—
—	—	—	—	—

Imgleichen, was auch für Fälle in den beiden erſten Verſuchen (nach der vorhergehenden Tafel) ſich ereignen mögen, ſo kann ein jeder von den m gegebenen Fällen

im dritten Versuche sich ereignen, und die Fälle, wenn drei Versuche statt finden, werden durch die Glieder folgender Tafel dargestellt, deren Anzahl m^3 ist.

a a a	*b a a*	*c a a*	*d a a*	—
a a b	*b a b*	*c a b*	*d a b*	—
a a c	*b a c*	*c a c*	*d a c*	—
a a d	*b a d*	*c a d*	*d a d*	—
—	—	—	—	—
a b a	*b b a*	*c b a*	*d b a*	—
a b b	*b b b*	*c b b*	*d b b*	—
a b c	*b b c*	*c b c*	*d b c*	—
a b d	*b b d*	*c b d*	*d b d*	—
—	—	—	—	—
a c a	*b c a*	*c c a*	*d c a*	—
a c b	*b c b*	*c c b*	*d c b*	—
a c c	*b c c*	*c c c*	*d c c*	—
a c d	*b c d*	*c c d*	*d c d*	—
—	—	—	—	—
a d a	*b d a*	*c d a*	*d d a*	—
a d b	*b d b*	*c d b*	*d d b*	—
a d c	*b d c*	*c d c*	*d d c*	—
a d d	*b d d*	*c d d*	*d d d*	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

Und so weiter. Ueberhaupt, wenn die Anzahl aller Fälle in $x-1$ Versuchen $=m^{x-1}$ ist, so ist die Anzahl der Fälle in x Versuchen $=m^x$, weil jeder Fall in $x-1$ Versuchen m mal genommen wird. *W. Z. E.*

§. 3.

Lehrsatz. *Ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Begebenheit bei einem Versuche geschiehet,* $= \frac{n}{m}$; *so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eben diese Begebenheit in x Versuchen, und zwar in jedem Versuche geschiehet* $= \left(\frac{n}{m}\right)^x$; *und die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit in x Versuchen gar nicht geschiehet* $= \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$.

Beweis. Wenn man voraussetzt, dass die Wahrscheinlichkeit in dem Falle eines einzigen Versuches $\frac{n}{m}$ ist, so ist die Anzahl der Fälle, welche die bestimmte Begebenheit geben, in einem Versuche $= n$, und die Anzahl der Fälle, welche diese Begebenheit nicht geben, $m - n$: folglich ist die Anzahl der Fälle, welche die Begebenheit, wenn x Versuche statt finden, in jedem Versuche geben (§. 2.) n^x, und die Anzahl der Fälle, welche die Begebenheit in keinem der x Versuche geben, $(m-n)^x$. Folglich ist 1. die Wahrscheinlichkeit, dass die bestimmte Begebenheit in allen x Versuchen sich ereignen wird, $= \frac{n^x}{m^x}$ oder $\left(\frac{n}{m}\right)^x$, welcher Satz schon (Kap. II. §.7.) erwiesen worden ist; und 2. die Wahrscheinlichkeit, dass die bestimmte Begebenheit in keinem von den x Versuchen sich ereignen wird $= \frac{(m-n)^x}{m^x}$ oder $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$. *W. Z. E.*

Z. B. Es würfeln vier Personen, jede einmal, mit zwei Würfeln; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass kei-

ne einen Pasch werfen wird $= \left\{1 - \frac{1}{6}\right\}^4$ oder $\frac{625}{1296} = \left\{\frac{30}{36}\right\}^4$. S. Kap. II. §. 8.

§. 4.

Bei mehrern Versuchen von einerlei Art, wo bei jedem Versuche mehrere Resultate möglich sind, vergrössert sich die Wahrscheinlichkeit eines jeden dieser Resultate nach Maassgabe der grössern Menge der Versuche. Z. B. Wenn die Wahrscheinlichkeit mit zwei gemeinen Spielwürfeln auf einen Wurf einen Pasch zu werfen, $\frac{1}{6}$ ist; so muss die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, auf drei solcher Würfe hinter einander grösser als $\frac{1}{6}$ sein. Doch wächst alsdann die Wahrscheinlichkeit nicht in der Verhältniss der Anzahl der Versuche, sondern wie eine gewisse Funktion von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheit in einem Versuche und der Anzahl der angestellten Versuche. Diese Funktion wird durch folgenden Lehrsatz bestimmt.

§. 5.

Lehrsatz. *Die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit bei mehrern Versuchen ist so gross als die Einheit, wenn man davon abziehet diejenige Potenz des Ueberschusses der Einheit über die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit in einem Versuche, deren Exponent der Anzahl der Versuche gleich ist.*

So hat man, wenn $\frac{n}{m}$ *die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit in einem Versuche,* x *die Anzahl der Versuche,* P *die Wahrscheinlichkeit eben dieser Begebenheit in* x *Versuchen bedeutet:* $P = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$.

Beweis. Wir haben gesehen (§. 3.), daſs, wenn man voraussetzt, daſs die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit in einem Versuche $\frac{n}{m}$, und die Anzahl der Versuche $= x$ ist; die Wahrscheinlichkeit, daſs die Begebenheit in gar keinem Versuche sich ereignen wird, $= \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$ ist: Folglich ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, welches diejenige Wahrscheinlichkeit ist, daſs diese Begebenheit in x Versuchen sich wenigstens einmal ereignen wird, $= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$ (Kap. I. §. 14. und 15.). *W. Z. E.*

§. 6.

Zusatz. 1. Wenn die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit in einem Versuche gegeben ist, so läſst sich daraus die Wahrscheinlichkeit eben dieser Begebenheit in x Versuchen herleiten; folglich läſst sich auch die Verhältniſs der Misen finden, daſs man rechtmäſsig für und wider solche Begebenheit wetten kann; und wie viel Versuche nöthig sind, um bei gleichen Misen mit Vortheil wetten zu können, daſs diese Begebenheit sich ereignen werde.

Zum Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit mit zwei Spielwürfeln auf einen Wurf einen Pasch zu werfen, ist $\frac{1}{6}$; also ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln

in $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\}$ Würfen, einen Pasch zu werfen:

1 –

$$\left\{\begin{array}{l} 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=1-\frac{5^2}{6^2}=\frac{11}{36} \\ 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216} \\ 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^4=1-\frac{5^4}{6^4}=\frac{671}{1296} \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Hieraus ersiehet man, daſs man bei gleichen Miſen mit zwei Würfeln in vier Würfen einen Paſch zu werfen, mit einigem Vortheile wetten kann, weil $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$ iſt; und daſs, damit die Wette, mit zwei Würfeln in $\left\{\begin{array}{c}2\\3\\4\end{array}\right\}$ Würfen einen Paſch zu werfen, gerecht iſt, die Miſen ſich verhalten müſſen, wie $\left\{\begin{array}{c}11:25\\91:125\\671:625\end{array}\right\}$ (Kap. I. §. 18.).

§. 7.

Zusatz 2. Sind von den folgenden drei Gröſsen:

der Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einem Verſuche $= \frac{n}{m}$

der Anzahl der Verſuche $= x$

und der Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit in dieſen Verſuchen $= P$

je zwei gegeben, ſo läſst ſich daraus allezeit die dritte beſtimmen. Denn aus der Gleichung

$P = 1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$, leitet man her

$\frac{n}{m} = 1 - \sqrt[x]{(1 - P)}$, und

$$x = \frac{\log.\ (1 - P)}{\log.\ (1 - \frac{n}{m})}.$$

§. 8.

Zusatz 3. Wenn $n = \frac{m}{2}$: welches der Fall für die rechtmäſsige Wette bei gleichen Miſen iſt, in einem einzigen Verſuche; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit eben dieſer Begebenheit in x Verſuchen ſein, $= 1 - \frac{1}{2^x}$; denn alsdann verwandelt ſich die Gröſse $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ in $1 - \left[1 - \frac{1}{2}\right]^x = 1 - \left[\frac{1}{2}\right]^x = 1 - \frac{1}{2^x}$.

§. 9.

Zusatz 4. Iſt die Zahl x der Verſuche unendlich; ſo wird der Bruch $\left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ unendlich klein oder 0; und alsdann $P = 1$. Hieraus ſiehet man, daſs die Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche, oder auch in einer endlichen Zahl von Verſuchen noch ſo geringe iſt, gewiſs wird, wenn man unendlich viel Verſuche annimmt.

§. 10.

Zusatz 5. Wenn P oder $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x = \frac{1}{2}$; ſo bekömmt man $\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt[x]{2}}$; Alſo: wenn die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einer gegebenen Anzahl von Verſuchen, $\frac{1}{2}$ wird, ſo iſt die Wahrſcheinlich-

keit dieser Begebenheit in einem einzigen Versuche eine irrational Zahl.

Und umgekehrt, wenn die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit in einem einzigen Versuche eine rational Zahl ist, so kann diese Begebenheit in einer bestimmten Menge von Versuchen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ genau nicht erhalten.

§. 11.*

LEHRSATZ. *Wenn* $\frac{n}{m}$ *die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit in einem Versuche bedeutet; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs diese Begebenheit in x Versuchen höchstens x−1 mal sich ereignen wird, oder wenigstens einmal sich nicht ereignen wird,* (aus §. 3.) $= 1 - \left[\frac{n}{m}\right]^x$.

§. 12.*

AUFGABE. *Für die Begebenheit mit einem gemeinen Spielwürfel, in mehrern Würfen wenigstens einmal ein As zu werfen, die Verhältniſs der Misen der beiden Spieler zu finden.*

AUFLÖSUNG. In einem Versuche ist die Wahrscheinlichkeit, ein As zu werfen, $= \frac{1}{6}$; also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, kein As zu werfen, $= \frac{5}{6}$; und folglich die gesuchte Verhältniſs der Misen $= 1:5$. In zwei Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]^2$ (§. 5.) $= 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^2 = \frac{11}{36}$; also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{25}{36}$; und

folglich die Verhältniss der Misen $= 11 : 25 = 1 : 2 + \frac{1}{11}$, geringer als die Verhältniss 1 : 2. In drei Würfen ist die Wahrscheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]^3 = 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$; also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{125}{216}$; und folglich die Verhältniss der Misen beider Spieler $= 91 : 125 = 1 : 1 + \frac{34}{91}$. In vier Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^4 = \frac{671}{1296}$; also die Verhältniss der Misen $= 671 : 625 = 1 + \frac{46}{625} : 1$. Und so weiter.

Ueberhaupt ist in x Versuchen die Wahrscheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^x = \frac{6^x - 5^x}{6^x}$; also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \left[\frac{5}{6}\right]^x$; und folglich die Verhältniss der Misen beider Spieler $= (6^x - 5^x) : 5^x$.

§. 13.*

Auf eben diese Weise findet man die Verhältniss der Misen zweier Spieler, wenn mit zwei Würfeln in x Würfen zwölf Augen geworfen werden sollen, $= 1 - \left[1 - \frac{1}{36}\right]^x : \left[1 - \frac{1}{36}\right]^x = 1 - \left[\frac{35}{36}\right]^x : \left[\frac{35}{36}\right]^x = 36^x - 35^x : 35^x$.

Z. B. Für zwei Würfe ist die Verhältniss der Misen $= 36^2 - 35^2 : 35^2 = 71 : 1225 = 1 : 17 + \frac{18}{71}$. Für vier Würfe ist diese Verhältniss $= 36^4 - 35^4 : 35^4 = 178991 : 1500\,625$

$= 1:8 + \frac{68697}{178991}$. Und so weiter. Endlich wird man hiedurch finden, dass jemand, um zwölf Augen zu werfen, erst bei 25 Würfen mit Vortheil wetten könne; da hingegen, mit einem Würfel eine Sechse zu werfen, bei vier Würfen die Wette schon mit Vortheil angestellet werden kann (§. 6. und 12.). Also haben die beiden Spieler, mit einem Würfel eine Sechse zu werfen, bei vier Würfen; und mit zwei Würfeln zwei Sechsen zu werfen, erst bei 25 Würfen beinahe gleiche Wahrscheinlichkeiten.

§. 14.*

Ist überhaupt in einem Versuche die Anzahl aller Fälle $= m$, der günstigen $= n$, also der widrigen $= m - n$; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Begebenheit in x Versuchen wenigstens einmal geschiehet (§. 5.) $= 1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ oder $1 - \frac{(m-n)^x}{m^x}$ oder $\frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$; und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{(m-n)^x}{m^x}$. Folglich die Verhältniss der Misen für die beiden Spieler $= \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x} : \frac{(m-n)^x}{m^x} = m^x - (m-n)^x : (m-n)^x$.

Z. B. Wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, auf einen Wurf mit drei gleichen Würfeln ein As zu werfen, so ist diese offenbar eben so gross, als diejenige Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in drei Würfen ein As zu werfen. Also ist die Verhältniss der Misen $=$

$$6^3 - (6-1)^3 : (6-1)^3 = 6^3 - 5^3 : 5^3 = 91 : 125 \text{ (§. 12.)}.$$

§. 15.*

Um zu finden, in wie viel Würfen beide Spieler einerlei Wahrscheinlichkeiten erhalten (§. 13.); setze man ihre Wahrscheinlichkeiten (§. 14.) einander gleich:

$$\frac{m^x - (m-n)^x}{m} = \frac{(m-n)^x}{m^x}, \text{ hieraus folgt}$$

$$m^x - (m-n)^x = (m-n)^x, \text{ oder}$$

$$m^x = 2 \cdot (m-n)^x, \text{ alſo}$$

$$x \cdot \log. m = \log. 2 + x \cdot \log. (m-n), \text{ und}$$

$$x = \frac{\log. 2}{\log. m - \log. (m-n)}. \text{*)}$$

Man findet alſo die geſuchte Zahl der Würfe, x, wenn man den Logarithmen der Zahl 2 durch den Unterſchied der Logarithmen der Zahlen m und $m-n$ dividirt.

Z. B. Für das letzte Beiſpiel (§. 13.) iſt $m = 36$, $m - n = 35$, alſo bekömmt man $x = \frac{\log. 2}{\log. 36 - \log. 35}$;

Nun iſt $\log. 2 = 0,3010300$ | $\log. 36 = 1,5563025$
$\log. 35 = 1,5440680$

$\log. 36 - \log. 35 = 0,0122345$

folglich $x = \frac{0,3010300}{0,0122345} = 24, +$, oder $25 -$; das heiſst, der eine Spieler wettet bei 24 Würfen noch nicht, aber bei 25 Würfen ſchon mit Vortheil, mit zwei Würfeln zwölf Augen zu werfen, wie am a. O. (§. 13.).

§. 16.*

Aufgabe. *Es treten einige Spieler zuſammen, um eine gewiſſe Anzahl Augen zu werfen, ſo, daſs einem nach dem andern einige Würfe hinter einander erlaubt werden. Man ſucht eines jeden Wahrſcheinlichkeit.*

Auflösung. Es bedeute r die Anzahl der Würfe des letzten, d. i. desjenigen Spielers, deſſen Wahrſcheinlichkeit geſucht wird, q aber die Summe der Würfe aller vorhergehenden Spieler; ſo iſt $q + r = x$ die Summe der Würfe aller Spieler bis zu demjenigen, deſſen

*) Eben dieſe Formel findet man aus der Formel für x in §. 7, wenn man $P = \frac{1}{2}$ ſetzt.

Wahrscheinlichkeit gesucht wird. Nun ist offenbar die Wahrscheinlichkeit aller Spieler bis zu dem letzten $= \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$ (§. 14.), weil es einerlei ist, ob ein jeder selbst, oder einer für alle würfelt; und die Wahrscheinlichkeit aller vorhergehenden Spieler $= \frac{m^{x-r} - (m-n)^{x-r}}{m^{x-r}}$; Folglich die Wahrscheinlichkeit des letzten =

$$\frac{m^x - (m-n)^x}{m^x} - \frac{m^{x-r} - (m-n)^{x-r}}{m^{x-r}} =$$

$$\frac{(m-n)^{x-r} - (m-n)^x . m^{-r}}{m^{x-r}} = \frac{m^r (m-n)^{x-r} - (m-n)^x}{m^x}$$

$$\text{oder} \left\{ \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^r} - 1 \right\} . \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x . \quad \textit{W. Z. F.}$$

Für $q = 0$, ist $r = x$, und folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$, wie gehörig (§. 14.).

§. 17. *

Beispiel. Acht Spieler wetten gegen einen Neunten, mit zwei Würfeln wenigstens einmal sieben Augen zu werfen, und zwar werden

dem ersten Spieler 1 Wurf, und hierauf
dem zweiten — 2 Würfe,
dem dritten — 3 —
dem vierten — 4 —
und so weiter

hinter einander erlaubt. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit des vierten Spielers zu wissen.

Hier ist $r = 4$, q oder $x - r = 1 + 2 + 3 = 6$, also $x = 10$, und folglich $\frac{m^r (m-n)^{x-r} - (m-n)^x}{m^x} =$

$\frac{m^4 (m-n)^6 - (m-n)^{10}}{m^{10}}$. Nun ist $m = 36$, $m-n = 30$ (Kap. I. §. 4. und 10.); da aber $36 : 30 = 6 : 5$, so kann man setzen $\frac{m^4 (m-n)^6 - (m-n)^{10}}{m^{10}} = \frac{6^4 . 5^6 - 5^{10}}{6^{10}} =$ $\frac{10484375}{60466176}$, welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

§. 18.*

Werden einem jeden Spieler gleich viel Würfe, an der Zahl r zu thun erlaubt; so ist, wenn die Anzahl der vorhergehenden Spieler $= y$ gesetzt wird, $x = q + r = r y + r$, und folglich die Wahrscheinlichkeit des letzten $=$

$$\frac{m^r (m-n)^{ry} - (m-n)^{ry+r}}{m^{ry+r}} = \frac{m^r - (m-n)^r}{m^r} . \left[\frac{m-n}{m}\right]^{ry}$$

oder $\left[1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^r\right] . \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{ry}$.

Ist $r = 1$, d. h. wird einem jeden nur ein Wurf erlaubt, so ist $x = y + 1$, und folglich die Wahrscheinlichkeit des letzten oder $(y+1)$ten Spielers $=$

$$\frac{m (m-n)^{x-1} - (m-n)^x}{m^x} \text{ oder } \frac{n}{m} . \left[1 - \frac{n}{m}\right]^{x-1} .$$

§. 19.*

Aufgabe. *In (§. 16.) werden dem ersten Spieler eine gegebene Anzahl Würfe erlaubt; man sucht die Anzahl der Würfe des zweiten und der übrigen Spieler, damit alle einerlei Wahrscheinlichkeiten erhalten.*

Auflösung. Es sei die Anzahl der Spieler $= a$; die Summe der Würfe aller Spieler $= x$, ebendieselbe weniger den Würfen des letzten Spielers $= y$; so ist $x - y$ die Anzahl der Würfe des letzten Spielers. Sind nun dem ersten Spieler f Würfe erlaubt, so ist seine Wahrscheinlichkeit $= \frac{m^f - (m-n)^f}{m^f}$ (§. 14.); Es ist aber die

Wahrſcheinlichkeit aller a Spieler zuſammengenommen:

$$\frac{m^x - (m-n)^x}{m^x} \text{ (ebendaſelbſt)}$$

offenbar ſo groſs, als die Wahrſcheinlichkeit des erſten Spielers a mal genommen; weil eines jeden folgenden Spielers Wahrſcheinlichkeit eben ſo groſs als die Wahrſcheinlichkeit des erſten Spielers ſein ſoll. Alſo hat man die Gleichung:

$$a.\frac{m^f - (m-n)^f}{m^f} = \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$$

aus welcher der Werth von x, oder die Anzahl der Würfe aller Spieler, folgendergeſtalt gefunden wird:

Es iſt $\frac{a(m^f - (m-n)^f)}{m^f} = 1 - \left[\frac{m-n}{m}\right]^x$, alſo

$$\left[\frac{m-n}{m}\right]^x = \frac{m^f - a(m^f - (m-n)^f)}{m^f} = \frac{(1-a)m^f + (m-n)^f a}{m^f}, \text{ und}$$

$$x(\log.(m-n) - \log.m) = \log.(m^f(1-a) + (m-n)^f a) - f.\log.m,$$

alſo $x = \frac{\log.(m^f(1-a) + (m-n)^f a) - f.\log.m}{\log.(m-n) - \log.m}$, oder

$$x = \frac{f.\log.m - \log.(m^f(1-a) + (m-n)^f a)}{\log.m - \log.(m-n)}.$$

Auf eben dieſe Art findet man aus folgender Gleichung, welche durch ähnliche Schlüſſe, wie die erſte für x, gefunden wird:

$$(a-1).\frac{m^f - (m-n)^f}{m^f} = \frac{m^y - (m-n)^y}{m^y};$$

die Anzahl der Würfe aller Spieler die Zahl der Würfe des letzten Spielers abgerechnet, oder

$$y = \frac{f.\log.m - \log.(m^f(2-a) + (m-n)^f(a-1))}{\log.m - \log.(m-n)},$$

welchen Ausdruk für y man auch unmittelbar erhält, wenn man in der Formel für x, $a-1$ anſtatt a ſchreibt.

Folglich ist die gesuchte Anzahl der Würfe des letzten Spielers oder $x-y=$

$$\frac{f\log. m - \log.(m^f(1-a)+(m-n)^f a)}{\log. m - \log.(m-n)} - \frac{f\log. m - \log.(m^f(2-a)+(m-n)^f(a-1))}{\log. m - \log.(m-n)} =$$

$$\frac{\log.(m^f(2-a)+(m-n)^f(a-1)) - \log.(m^f(1-a)+(m-n)^f a)}{\log. m - \log.(m-n)}.$$

W. Z. F.

§. 20.*

Beispiel. Wenn drei Spieler sind, und dem ersten zwei Würfe erlaubt sind, und mit zwei Würfeln sieben Augen geworfen werden sollen; so ist $m=36$, $m-n=30$, dafür man, um die Rechnung abzukürzen, $m=6$ und $m-n=5$ setzt, ferner $f=2$, folglich ist

$$x-y=\frac{\log.(6^2(2-a)+5^2(a-1)) - \log.(6^2(1-a)+5^2 a)}{\log. 6 - \log. 5}$$

Nun setze man *fürs erste* $a=2$, so ist $x-y=$

$$\frac{\log.25 - \log.(50-36)}{\log.6 - \log.5},$$

$$\begin{array}{r} \log. 25 = 1,3979400 \\ \log.(50-36) = \log. 14 = 1,1461280 \\ \hline \log.25 - \log. 14 = 0,2518120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log. 6 = 0,7781513 \\ \log. 5 = 0,6989700 \\ \hline \log.6 - \log.5 = 0,0791813 \end{array}$$

also $x-y=\dfrac{\log.25 - \log.14}{\log.6-\log.5} = \dfrac{0,2518120}{0,0791813} = \dfrac{2518120}{791813} = 3,+;$

und *zweitens* $a=3$, so ist $x-y=$

$$\frac{\log.(50-36) - \log.(75-72)}{\log.6 - \log.5} = \frac{\log.14 - \log.3}{\log.6 - \log.5},$$

$$\begin{array}{r} \log. 14 = 1,1461280 \\ \log. 3 = 0,4771213 \\ \hline \log 14 - \log. 3 = 0,6690067 \end{array}$$

Demnach ist $x - y = \frac{0,6690067}{0,0791813} = 8, +.$

Also muſs der zweite Spieler dreimal, und der dritte achtmal würfeln.

§. 21.*

In einer Urne liegen sechs weiſse und sechs schwarze Kugeln. Greift nun der erste unter zwei Spielern zweimal hinein, um nach einander zwei Kugeln herauszuziehen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs er eine weiſse Kugel zieht (§. 8.) $1 - \frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$. Weil diese Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$ ist; so erhellet, daſs für den Fall die vorige Aufgabe (§. 19.) unmöglich ist, welches auch die Rechnung giebt. Nämlich: da hier zwei Spieler sind, so ist $a = 2$; ferner ist $f = 2$, $m = 12$, $m - n = 6$, oder $m = 2$, $m - n = 1$, also $x - y = \frac{\log. 1 - \log. (-4 + 2)}{\log. 2 - \log. 1} = \frac{-\log. -2}{\log. 2}$, welches eine unmögliche Gröſse ist. *)

Wenn also die Aufgabe (§. 19.) möglich sein soll, so darf des ersten Spielers Wahrscheinlichkeit, bei zwei Spielern nicht gröſser als $\frac{1}{2}$; bei drei Spielern nicht $> \frac{1}{3}$; bei vier Spielern nicht $> \frac{1}{4}$; u. s. f. sein.

*) Kästners Analysis des Unendl. 332. VII.

§. 22.*

ANMERKUNG. Wir haben bisher die Wahrscheinlichkeit desjenigen gesucht, der in mehrern Versuchen etwas einmal zu leisten unternimmt, wobei jedoch vorausgesetzt worden ist, dass er auch alsdann gewinnt, wenn die Begebenheit mehr als einmal geschiehet. Nun gehen wir weiter fort, um die Wahrscheinlichkeit desjenigen zu finden, der in mehrern Versuchen etwas $\left\{\begin{array}{l}\text{präcise}\\ \text{höchstens}\\ \text{wenigstens}\end{array}\right\}$ 1, 2, 3, 4, ... *r* mal zu leisten unternimmt.

§. 23.*

AUFGABE. *Man würfle fünfmal hinter einander mit zwei Würfeln. Was ist die Wahrscheinlichkeit, just dreimal zehn Augen, und zweimal neun Augen zu werfen?*

AUFLÖSUNG. I. Vermöge (§. 2.) ist die Anzahl der Arten, auf welche die erste Begebenheit: mit zwei Würfeln zehn Augen zu werfen, in drei Versuchen sich ereignen kann, $= 3^3$ oder 27; und die Anzahl der Arten, auf welche die zweite Begebenheit: mit zwei Würfeln neun Augen zu werfen, in zwei Versuchen sich ereignen kann, $= 4^2$ oder 16. Aber jede Art die zweite Begebenheit zweimal hervorzubringen, kann mit jeder Art die erste Begebenheit dreimal hervorzubringen, auf $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ oder zehn Arten verbunden werden. Folglich ist die Anzahl der Arten, die erste Begebenheit dreimal, und die zweite Begebenheit zweimal, in fünf Versuchen zu erhalten $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 4^2 \cdot 3^3$ oder 4320, welche Zahl der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist. Der Nenner ist (aus §. 2.) $= 36^5$ oder 60466176. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{4^2\cdot 3^3}{36^5}=\frac{4320}{60466176}=\frac{135}{1889568}.\quad W.\ Z.\ F.$$

II. Zu dieser Auflösung scheint uns noch nachstehende Erläuterung zu geben, nöthig zu sein: Wir wollen unter *a*, *b*, *c*, diejenigen drei Fälle verstehen, welche die erste Begebenheit in einem Versuche geben, und unter a', b', c', d' diejenigen vier Fälle, welche die zweite Begebenheit in einem Versuche geben; so lassen sich alle Arten, auf welche die erste Begebenheit in drei Versuchen hervorgebracht werden kann, durch die Glieder nachfolgender Tafel darstellen:

a a a	*b a a*	*c a a*
a a b	*b a b*	*c a b*
a a c	*b a c*	*c a c*
a b a	*b b a*	*c b a*
a b b	*b b b*	*c b b*
a b c	*b b c*	*c b c*
a c a	*b c a*	*c c a*
a c b	*b c b*	*c c b*
a c c	*b c c*	*c c c*

deren Anzahl $= 3^3$ ist (§. 2.); und gleichfalls lassen sich alle gleich mögliche Arten, auf welche die zweite Begebenheit in zwei Versuchen hervorgebracht werden kann, in folgender Tafel vorstellen:

$a'\ a'$	$b'\ a'$	$c'\ a'$	$d'\ a'$
$a'\ b'$	$b'\ b'$	$c'\ b'$	$d'\ b'$
$a'\ c'$	$b'\ c'$	$c'\ c'$	$d'\ c'$
$a'\ d'$	$b'\ d'$	$c'\ d'$	$d'\ d'$

worin die Anzahl der Glieder $= 4^2$ ist. Jede dieser Arten, die zweite Begebenheit zweimal hervorzubringen, wie z. B. $b'\ d'$ ist, kann mit jeder der Arten, die erste Begebenheit dreimal hervorzubringen, z. B. mit *b a c*, auf $\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$ d. i. zehn Arten verbunden werden, wie fol-

gende Tafel zeigt:

b′ d′ b a c	*b′ b d′ a c*	*b′ b a d′ c*	*b′ b a c d′*
	b b′ d′ a c	*b b′ a d′ c*	*b b′ a c d′*
		b a b′ d′ c	*b a b′ c d′*
			b a c b′ d′

in welcher offenbar die Anzahl der Glieder so groſs als die Menge der Verbindungen nach 2 von 5 Dingen iſt; denn es kann ſich ereignen

b′ im 1ſten u. *d′* im 2ten;	*b′* im 1ſten u. *d′* im 3ten;
	b′ im 2ten u. *d′* im 3ten;
b′ im 1ſten u. *d′* im 4ten;	*b′* im 1ſten u. *d′* im 5ten
b′ im 2ten u. *d′* im 4ten;	*b′* im 2ten u. *d′* im 5ten
b′ im 3ten u. *d′* im 4ten;	*b′* im 3ten u. *d′* im 5ten
	b′ im 4ten u. *d′* im 5ten

Verſuche. Wobei jedoch zu merken, daſs die Aufeinanderfolge der Buchſtaben in dieſen Tafeln nicht verändert werden darf. So giebt auch folgende Tafel:

b a c b′ d′	*b a b′ c d′*	*b a b′ d′ c*
	b b′ a c d′	*b b′ a d′ c*
		b b′ d′ a c
	b′ b a c d′	*b′ b a d′ c*
		b′ b d′ a c
		b′ d′ b a c

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ Verbindungen. Und eben ſo verhält es ſich mit einer jeden Combination eines Gliedes der einen, mit einem Gliede der andern Tafel.

§. 24.*

Aufgabe.

Man würfle achtmal hinter einander mit einem gemeinen Spielwürfel. Wie groſs wird die Wahrscheinlichkeit ſein, juſt dreimal ein As, und fünfmal zwei Augen zu werfen?

Auflösung.

Aus (§. 2.) iſt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche die erſte Begebenheit in drei Verſuchen ſich ereignen kann, $= 1^3 = 1$; eben ſo groſs als die Anzahl der Arten: 1^5, auf welche die zweite Begebenheit in fünf Verſuchen ſich ereignen kann. Jene werde durch $a\,a\,a$, und dieſe durch $a'\,a'\,a'\,a'\,a'$ ausgedrükt; ſo kann die einzige Art $a\,a\,a$ im

1ſten 2ten u.3ten;	1ſten 2ten u. 4ten;	1ſten 2ten u.5ten;	1ſten 2ten u.6ten;	1ſten 2ten u.7ten;	1ſten 2ten u 8ten
	1 — 3 — 4	1 — 3 — 5	1 — 3 — 6	1 — 3 — 7	1 — 3 — 8
		1 — 4 — 5	1 — 4 — 6	1 — 4 — 7	1 — 4 — 8
			1 — 5 — 6	1 — 5 — 7	1 — 5 — 8
				1 — 6 — 7	1 — 6 — 8
					1 — 7 — 8
	2ten 3ten u. 4ten;	2ten 3ten u. 5ten;	2ten 3ten u. 6ten;	2ten 3ten u. 7ten;	2ten 3ten u. 8ten
		2 — 4 — 5	2 — 4 — 6	2 — 4 — 7	2 — 4 — 8
			2 — 5 — 6	2 — 5 — 7	2 — 5 — 8
				2 — 6 — 7	2 — 6 — 8
					2 — 7 — 8
		3ten 4ten u. 5ten;	3ten 4ten u. 6ſten;	3ten 4ten u.7ten;	3ten 4ten u. 8ten
			3 — 5 — 6	3 — 5 — 7	3 — 5 — 8
				3 — 6 — 7	3 — 6 — 8
					3 — 7 — 8
			4ten 5ten u. 6ſten;	4ten 5ten u. 7ten;	4ten 5ten u. 8ten
				4 — 6 — 7	4 — 6 — 8
					4 — 7 — 8
				5ten 6ſten u.7ten;	5ten 6ſten u. 8ten
					5 — 7 — 8
					6ſten 7ten u. 8ten

Ver-

Verſuche ſich ereignen. Aber dieſe Tafel enthält die Menge aller Verbindungen nach 3 von acht (oder nach $8-3$ d. i. 5 von 8) Dingen, und giebt alſo $\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$ Verbindungen; welche Zahl der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit iſt. Der Nenner derſelben iſt $=6^8=$ 1679616; folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=$ $\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1^5\cdot1^3}{6^8}$ oder $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1^5\cdot1^3}{6^8}=\frac{56}{1679616}=\frac{7}{209952}$. *W. Z. F.*

§. 25.

Lehrsatz. *Man nehme überhaupt an, daſs 1) zwei verſchiedene Begebenheiten von einer und ebenderſelben Handlung oder eben dem Zuſtande abhängig ſind; 2) n die Anzahl der Fälle iſt, welche die erſte von dieſen beiden Begebenheiten in einem Verſuche geben, und q die Anzahl der Fälle iſt, welche die zweite Begebenheit in einem Verſuche geben; 3) keiner dieſer Fälle die beiden Begebenheiten zugleich giebt. Ich ſage: die Anzahl der Arten juſt r mal die erſte Begebenheit und juſt t mal die zweite Begebenheit in (r + t) Verſuchen zu erhalten, iſt*

$$\frac{(r+t)\ldots\ldots(r+1)}{1\cdot2\ldots\ldots t}\cdot n^r\cdot q^t \text{ oder } \frac{(r+t)\ldots\ldots(t+1)}{1\cdot2\ldots\ldots r}\cdot n^r\cdot q^t.$$

Und daher, wenn m die Anzahl aller Fälle in einem Verſuche bedeutet, die Wahrſcheinlichkeit eben erwähnter Begebenheit:

$$\frac{(r+t)\ldots\ldots(r+1)}{1\cdot2\ldots\ldots t}\cdot\frac{n^r\cdot q^t}{m^{r+t}}.$$

Beweis. Es ſeien $a, b, c, d,$ – die n Fälle, welche die erſte Begebenheit in einem Verſuche geben, $a' b' c' d'$ – die q Fälle, welche die zweite Begebenheit in einem Verſuche geben; ſo erhellet aus dem erſten Lehrſatze (§. 2.) daſs die Anzahl der Arten, auf welche die erſte Begebenheit in r Verſuchen ſich ereignen kann, $=n^r$,

und die Anzahl der Arten, auf welche die zweite Begebenheit in t Verſuchen ſich ereignen kann, $= q^t$ iſt.

Für den Fall alſo, daſs

$$t = \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\ \vdots\\ t\end{matrix}\right\};\ \text{können die} \left\{\begin{matrix}1\\ 1 \text{ oder } 2\\ 1, 2 \text{ oder } 3\\ 1, 2, 3 \text{ oder } 4\\ \vdots\\ 1, 2, 3 \ldots \text{ oder } t\end{matrix}\right\}\text{Fälle,}$$

aus denen eine jede von den $\left\{\begin{matrix}q^1\\ q^2\\ q^3\\ q^4\\ \vdots\\ q^t\end{matrix}\right\}$ Arten, auf welche einige von den q Fällen a', b', c', d' – ſich

in $\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\ \vdots\\ t\end{matrix}\right\}$ Verſuchen ereignen können, zuſammengeſetzt iſt, ohne die Ordnung zu unterbrechen, in der ſie auf einander folgen, mit den Fällen, welche die erſte Begebenheit geben, verbunden werden, und folglich im

[1ſten, 2ten, 3ten 4ten etc. $(r + 1)$ ten]

1ſten u. 2ten, 1ſten u. 3ten, 1ſten u. 4ten etc. 1ſten u. $(r + 2)$ ten

2 — 3 — 2 — 4 — —

3 — 4 — —

—

1ſten 2ten u. 3ten, 1ſten 2ten u. 4ten, etc. 1ſten 2ten u. $(r + 3)$ ten

—

1 — 3 — 4 — —

—

2ten 3ten u. 4ten etc.

—

—

1ſten 2ten 3ten u. 4ten, etc. 1ſten 2ten 3ten u. $(r + 4)$ ten

—

—

.

Verſuche ſich ereignen; welches auf

$$\left.\left\{\begin{array}{l}[r+1] \\ \left[\frac{(r+2)(r+1)}{1\,.\,2}\right] \\ \left[\frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\right] \\ \left[\frac{(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{(r+t)\,\ldots\,(r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,t}\right]\end{array}\right\}\right.$$

Arten geschehen kann. Folglich ist (t unbestimmt gelassen) die Anzahl der Arten, auf welche die erste Begebenheit just r mal, und die zweite just t mal in $(r+t)$ Versuchen hervorgebracht werden kann, d. i. der Zähler der Wahrscheinlichkeit $= \frac{(r+t)\ldots.(r+1)}{1\,.\,2\ldots.t} . n^r . q^t$ oder weil die Anzahl der Verbindungen von $r+t$ Dingen nach t, der nach $(r+t)-t=r$ von $r+t$ gleich ist, $= \frac{(r+t)\ldots.(t+1)}{1\,.\,2\ldots.r} . n^r . q^t$; auf welche letztre Formel man auch durch die vorigen Schlüsse gekommen sein würde, wenn man die Betrachtung mit r anstatt t angefangen hätte. *W. Z. E.*

Weil dieser Beweis für einige Leser zu abstrakt sein dürfte; so wollen wir ihn jetzt, um ihn sinnlicher zu machen, auf einen besondern Fall anwenden.

Man setze $n=3$, $q=4$, $r=3$, $t=2$; so geben jede 1 oder 2 Fälle, woraus eine jede von den 4^2 Arten die 2te Begebenheit in zwei Versuchen hervorzubringen, bestehet, und die alle durch folgende Tafel dargestellet werden:

$a'\,a'$	$b'\,a'$	$c'\,a'$	$d'\,a'$
$a'\,b'$	$b'\,b'$	$c'\,b'$	$d'\,b'$
$a'\,c'$	$b'\,c'$	$c'\,c'$	$d'\,c'$
$a'\,d'$	$b'\,d'$	$c'\,d'$	$d'\,d'$

verbunden, ohne Unterbrechung der Ordnung, in der sie auf einander folgen, mit jeder von den 3^3 Arten, auf

welche die erste Begebenheit in drei Versuchen sich ereignen kann, und die folgende Tafel angiebt:

a a a	*b a a*	*c a a*
a a b	*b a b*	*c a b*
a a c	*b a c*	*c a c*
a b a	*b b a*	*c b a*
a b b	*b b b*	*c b b*
a b c	*b b c*	*c b c*
a c a	*b c a*	*c c a*
a c b	*b c b*	*c c b*
a c c	*b c c*	*c c c*

überhaupt $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 4^2 \cdot 3^3$ gleich mögliche Arten, auf welche die erste Begebenheit dreimal und die zweite zweimal in fünf Versuchen erhalten werden kann. (Man vergleiche §. 23. II.)

* *Zum Beispiel.* Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs, wenn man viermal hinter einander zwei Würfel auf einen Tisch wirft, just zweimal die Augen 5 und 4, und zweimal 3 und 2 fallen werden?

Hier ist $n=2$, $q=2$, $m=36$, $r=2$, $t=2$, $r+t=4$, folglich $\frac{(r+t)\ldots.(r+1)}{1 \cdot 2 \ldots. t} \cdot \frac{n^r \cdot q^t}{m^{r+t}} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2 \cdot 2^2}{36^4} = \frac{1}{17496}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

§. 26.*

Lehrsatz. *Wenn von einer und ebenderselben Handlung oder ebendemselben Zustande drei verschiedene Begebenheiten abhängen, so daſs* $\begin{bmatrix} n \\ q \\ q' \end{bmatrix}$ *die Anzahl der Fälle ist, welche die* $\begin{bmatrix} \text{1ste} \\ \text{2te} \\ \text{3te} \end{bmatrix}$ *Begebenheit in einem Versuche geben, und unter allen diesen Fällen keine vorhanden*

sind, die mehr als eine von diesen Begebenheiten zugleich geben: so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche in $(r+t+t')$ *Versuchen die erste Begebenheit just* r *mal, die zweite* t *mal, die dritte* t' *mal sich ereignen kann,*

$$= \frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t')} \cdot \frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \cdot n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}.$$

Und daher, m *für die Anzahl aller Fälle, die von der gegebenen Handlung, Bewegung, oder dem gegebenen Zustande abhängen, in einem Versuche angenommen, die Wahrscheinlichkeit just* r *mal die erste,* t *mal die zweite, und* t' *mal die dritte Begebenheit in* $(r+t+t')$ *Versuchen zu erhalten,*

$$= \frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t')} \cdot \frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \times \frac{n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}}{m^{r+t+t'}}$$

oder

$$\frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'} \cdot \frac{n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}}{m^{r+t+t'}}.$$

Beweis. Man weis, daſs die Anzahl der Arten, auf welche die zweite Begebenheit juſt t mal, und die dritte juſt t' mal in $(t+t')$ Verſuchen ſich ereignen kann, folgende iſt:

$$\frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \cdot q^t \cdot q'^{t'}\ (\S.\ 25.);$$

Nun iſt die Anzahl der Arten, auf welche die erſte Begebenheit in r Verſuchen ſich ereignen kann, $= n^r$. Setzt man alſo nach der Ordnung

$$r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \ldots\ldots \\ r \end{Bmatrix};\ \text{ſo können die}\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ \text{oder}\ 2 \\ 1,2\ \text{oder}\ 3 \\ 1,2,3\ \text{oder}\ 4 \\ \ldots\ldots \\ 1,2,3,\ldots\ \text{oder}\ r \end{Bmatrix}\ \text{Fälle,}$$

woraus eine jede von den $\left\{\begin{matrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ \dots \\ n^r \end{matrix}\right\}$ Arten, auf welche einige von den n Fällen sich in $\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \\ r \end{matrix}\right\}$ Versuchen ereignen können, bestehet, ohne irgend eine Veränderung der Ordnung, in der sie auf einander folgen, mit jedem von den $\frac{(t+t')\dots(t+1)}{1.2\dots t'} . q^t . q'^{t'}$ Fällen, welche die zweite Begebenheit t mal, und die dritte t' mal in $(t+t')$ Versuchen geben, verbunden werden, und folglich im

$$\left\{\begin{matrix} [\text{1sten, 2ten, 3ten 4ten,} \dots (t+t'+1) \text{ sten}] \\ \left[\begin{matrix} \text{1sten u. 2ten, 1 u. 3ten} \dots \text{1 u.} (t+t'+2) \text{ ten} \\ 2-3-\dots\dots \end{matrix}\right] \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{matrix}\right\}$$

Versuche zum Vorschein kommen; wo

$$\left\{\begin{matrix} t+t'+1 \\ \frac{(t+t'+2)(t+t'+1)}{1 \ . \ 2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{(t+t'+r)\dots(t+t'+1)}{1.2\dots r} \end{matrix}\right\}$$

Arten möglich sind. Folglich ist die gesuchte Zahl der gleich möglichen Arten, auf welche die erste Begebenheit just r mal, die zweite just t mal, und die dritte just t' mal in $(r+t+t')$ Versuchen sich ereignen kann $= \frac{(r+t+t')\dots(t+t'+1)}{1.2\dots r} . \frac{(t+t')\dots(t+1)}{1.2\dots t'} . n^r . q^t . q'^{t'}$

oder $\frac{(r+t+t')\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots(t+t')} \cdot \frac{(t+t')\ldots\ldots(t+1)}{1.2\ldots\ldots t'} \cdot n^r . q^t . q'^{t'}$.

W. Z. E.

§. 27.*

Beispiele. Was ist die Wahrscheinlichkeit just

$$\left[\begin{array}{lll} 3 & \text{mal} & 1 \\ 5 & — & 2 \\ 2 & — & 3 \end{array}\right]$$

in zehn Versuchen mit einem Würfel (oder mit zehn Würfeln in einem Wurfe) zu treffen?

Hier ist $m=6$, $n=1=q=q'$, $r=3$, $t=5$, $t'=2$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{7.6}{1.2} \cdot \frac{1}{6^{10}} = \frac{2520}{60466176} = \frac{315}{7558272}.$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln auf einmal ein As, eine Zwei und eine Drei zu werfen?

Hier ist $m=6$, $n=q=q'=r=t=t'=1$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{3.2}{1} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

§. 28.*

Zusatz. I. Auf ähnliche Art findet man, wenn vier Begebenheiten gegeben sind, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie n, q, q', q'' verhalten, die Wahrscheinlichkeit, dass in $(r+t+t'+t'')$ Versuchen

die 1ste Begebenheit r mal
— 2te — — t mal
— 3te — — t' mal
— 4te — — t'' mal

geschiehet, =

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots(t+t'+t'')} \cdot \frac{(t+t'+t'')\ldots\ldots(t+1)}{1.2\ldots\ldots(t'+t'')} \times$$

$$\frac{(t'+t'')\ldots\ldots(t'+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,t''}\cdot\frac{n^r\,.\,q^t\,.\,q'^{t'}q''^{t''}}{m^{r+t+t'+t''}} =$$

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots.t.\;1.2\ldots.t'.\;1.2\ldots.t''}\cdot\frac{n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}}{m^{r+t+t'+t''}}.$$

Denn aus dem vorigen §. 26. ist die Grösse der Wahrscheinlichkeit bekannt, dass die 2te Begebenheit t mal

— 3 — — t' —

— 4 — — t'' —

in $(t+t'+t'')$ Versuchen sich ereignet. Nun kann eine jede von den n^r Arten, auf welche die erste Begebenheit sich in r Versuchen ereignen kann, ohne die Ordnung zu unterbrechen, in der die Fälle auf einander folgen, mit einer jeden der Arten die 2te Begebenheit t mal

— 3te — — t' —

— 4te — — t'' —

in $(t+t'+t'')$ Versuchen hervorzubringen, auf

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots.(t+t'+t''+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}$$ das ist

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots.(r+1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,(t+t'+t'')}$$ Arten verbunden werden,

wie folgende Tafel für $r = \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\\ldots\\r\end{matrix}\right\}$ angiebt:

$$\left\{\begin{array}{l}1;\;\; 2;\;\; 3;\;\; 4;\ldots\ldots(t+t'+t''+1)\\ 1,2;\; 1,3;\ldots\ldots—\ldots 1,\;(t+t'+t''+2)\\ \quad 2,3;\ldots\ldots—\\ \quad\quad \text{etc.}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$$ Folglich etc.

II. Für fünf Begebenheiten, deren Wahrscheinlichkeiten in einem Versuche sich wie $n : q : q' : q'' : q'''$ verhalten, wird also die Wahrscheinlichkeit sein, dass in $(r+t+t'+t''+t''')$ Versuchen

die 1ste Begebenheit r mal
— 2te — — t —
— 3te — — t' —
— 4te — — t'' —
— 5te — — t''' —

geschiehet:

$$\frac{(r+t+t'+t''+t''')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t'+t''+t''')} \cdot \frac{(t+t'+t''+t''')\ldots(t+1)}{1.2\ldots(t'+t''+t''')} \times$$

$$\frac{(t'+t''+t''')\ldots(t'+1)}{1.2\ldots(t''+t''')} \cdot \frac{(t''+t''')\ldots(t''+1)}{1.2\ldots t'''} \times$$

$$n^r . q^t . q'^{t'} . q''^{t''} . q'''^{t'''} . \frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{(r+t+t'+t''+t''')\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''.1.2\ldots t'''} . n^r . q^t . q'^{t'} . q''^{t''} . q'''^{t'''} \times$$

$$\frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''}}. \quad \text{Und so weiter.}$$

III. Für sechs Begebenheiten:

$$\frac{(r+t+t'+t''+t'''+t^{IV})\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''.1.2\ldots t'''.1.2\ldots t^{IV}} \times$$

$$n^r . q^t . q'^{t'} . q''^{t''} . q'''^{t'''} . q^{IV t^{IV}} \frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''+t^{IV}}}.$$

IV. Ueberhaupt also: *Wenn bei so viel verschiedenen Begebenheiten, als man will, die von einer und ebenderselben Handlung, Bewegung, oder ebendemselben Zustande abhängen,* $\left\{\begin{matrix} n \\ q \\ q' \\ q'' \\ \ldots \\ q^z \end{matrix}\right\}$ *die Anzahl der Fälle ist, welche*

$\left.\begin{array}{l}\text{1ste}\\ \text{2te}\\ \text{3te}\\ \text{4te}\\ \dots\dots\\ (z+2)\end{array}\right\}$ *Begebenheit in einem Versuche geben, und keiner von allen diesen Fällen mehrere dieser Begebenheiten zugleich giebt, m die Anzahl der Fälle*

ist, welche von der gegebenen Handlung, Bewegung, oder von dem gegebenen Zustande abhängen; so ist die Wahrscheinlichkeit in $(r+t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)$ *Versuchen*

just r *mal die 1ste Begebenheit*
— t — — *2te* — —
— t' — — *3te* — —
— t'' — — *4te* — —
— t''' — — *5te* — —
.
— t^z — — $(z+2)$ — —

zu erhalten =

$$\frac{(r+t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)\ \ldots\ldots\ldots\ (r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''.1.2\ldots t'''\ldots 1.2\ldots t^z}\times$$

$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots q^{z\,t^z}.\frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z}}.$$

Beweis. Denn wenn die Anzahl der günstigen Fälle in $(t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)$ Versuchen

die 2te Begebenheit t mal
— 3te — — t' —
— 4te — — t'' —
.
— $(z+2)$ — — t^z —

zu erhalten, =

$$\frac{(t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots(t+1)}{1.2\ldots(t'+t''+t'''+\ldots+t^z)}.\frac{(t'+t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots(t'+1)}{1.2\ldots(t''+t'''+t^{iv}+\ldots+t^z)}\times$$

$$\frac{(t''+t'''+t^{iv}+\ldots+t^z)\ldots(t''+1)}{1.2\ldots(t'''+t^{iv}+t^{v}+\ldots+t^z)}\times\ldots\ldots\ldots\times$$

$$\frac{(t^{z-1}+t^z)\ldots\ldots(t^{z-1}+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots t^z}.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots\ldots q^{z t^z}$$

richtig ist; so kann eine jede von den n^r Arten, auf welche die erste Begebenheit r mal in r Versuchen erhalten werden kann, ohne die Ordnung zu unterbrechen, in der die Fälle, woraus eine jede von den nur erwähnten n^r Arten bestehet, auf einander folgen, mit jeder von den Arten die 2te Begebenheit t mal

— 3te — — t' —
— 4te — — t'' —
.
— $(z+2)$ — — t^z —

in $(t+t'+t''+t'''+\ldots\ldots+t^z)$ Versuchen hervorzubringen,

auf $\frac{(r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots(t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots r}$

das ist $\frac{(r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)}$ Arten verbunden werden, welches also folgendes Produkt für den Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit giebt:

$$\frac{(r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(t+t'+t''+t'''+\ldots\ldots+t^z)}\times$$
$$\frac{(t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots(t+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(t'+t''+t'''+\ldots\ldots+t^z)}\times$$
$$\frac{(t'+t''+\ldots+t^z)\ldots(t'+1)}{1.2\ldots(t''+t'''+\ldots+t^z)}.\frac{(t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots(t''+1)}{1.2\ldots(t'''+t^{IV}+\ldots+t^z)}\ldots\ldots$$
$$\frac{(t^{z-2}+t^{z-1}+t^z)\ldots(t^{z-2}+1)}{1.2\ldots(t^{z-1}+t^z)}.\frac{(t^{z-1}+t^z)\ldots(t^{z-1}+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots t^z}\times$$
$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots\ldots q^{z t^z} =$$
$$\frac{(r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''.1.2\ldots t'''\ldots 1.2\ldots t^{z-1}.1.2\ldots t^z}\times$$
$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots\ldots q^{z t^z}.$$

Daſs aber das Produkt $\frac{(t+t'+\ldots+t^z)\ldots(t+1)}{1.2\ldots(t'+\ldots+t^z)}$. etc. für $t + t' + \ldots\ldots\ldots + t^z = t + t'$, und für $t+t'+\ldots+t^z = t+t'+t''$ richtig iſt, erhellet aus den (§. 25. und 26.) geführten Beweiſen. Folglich iſt der zu beweiſende Satz auch richtig für $r+t+t'+\ldots\ldots+t^z = r+t+t'+t''$; und demnach auch für $r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z = r+t+t'+t''+t'''$; Und ſo weiter für alle folgende Werthe von $r+t+t'+t''+\ldots+t^z$ richtig. Endlich iſt der Nenner der Wahrſcheinlichkeit $= m^{r+t+t'+t''+\ldots+t^z}$.

§. 29.

Beispiele. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem gemeinen Spielwürfel in zwanzig Würfen

hinter einander {3 mal ein As, 5 — eine 2, 2 — — 3, 4 — — 4, 5 — — 5, 1 — — 6} zu werfen?

Hier iſt $r=3$, $t=5$, $t'=2$, $t''=4$, $t'''=5$, $t^{IV}=1$; $r+t+t'+t''+t'''+t^{IV} = x = 20$; $m = 6$; $n=q=q'=q''=q'''=q^{IV}=1$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.1.2.1.2.3.4.1.2.3.4.5.1} \cdot \frac{1}{6^{20}} = \frac{56581525}{352638738432}.$$

* Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in ſechs Würfen (oder auf einen Wurf mit ſechs

$$\text{Würfeln}\left\{\begin{array}{l} \text{1 mal ein As} \\ \text{1 — eine 2} \\ \text{1 — — 3} \\ \text{1 — — 4} \\ \text{1 — — 5} \\ \text{1 — — 6} \end{array}\right\} \text{zu werfen?}$$

Hier ist $r = t = t' = t'' = t''' = t^{IV} = 1 = n = q = q' = q'' = q''' = q^{IV}$; $x = 6 = m$; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{6.5.4.3.2}{6^6} = \frac{20}{6^4} = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324}$. Man vergleiche Kap. II. §. 9.

§. 30.*

Lehrsatz. *Wenn die Anzahl der Versuche* $= x > r + t + t' + t'' + \ldots + t^z$ *ist; so ist die Wahrscheinlichkeit in* x *Versuchen*

just r *mal die 1ste Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit in einem Versuche* $= \frac{n}{m}$,

— t — — *2te* — — — — — $= \frac{q}{m}$,

— t' — — *3te* — — — — — $= \frac{q'}{m}$,

.

— t^z — — $(z+2)$ — — — — — $= \frac{q^z}{m}$

zu erhalten =

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(r+t+t'+t''+\ldots+t^z+1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-r-t-t'-t''-\ldots-t^z)} \times$$

$$(m-n-q-q'-q''-\ldots-q^z)^{x-r-t-t'-\ldots-t^z} \times$$

$$\frac{(r+t+t'+t''+\ldots+t^z)\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''\ldots 1.2\ldots t^z} . n^r . q^t . q'^{t'} . q''^{t''} \ldots q^{z t^z} . \frac{1}{m^x}$$

oder $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t\ \ldots.1.2\ldots.t^z.1.2\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)} \times$

$n^r.q^t.q'^{t'}\ldots.q^{z\,t^z}.(m-n-q-q'-\ldots-q^z)^{x-r-t-t'-\ldots-t^z}.\frac{1}{m^x}$

Beweis. Die $m-n-q-q'-q''-\ldots.-q^z$ Fälle, welche keine von den bestimmten $(z+2)$ Begebenheiten geben, können in den $(x-r-t-t'-\ldots.-t^z)$ Versuchen, wo die Ereigniss keiner von diesen Begebenheiten verlangt wird, auf

$$(m-n-q-q'-\ldots.-q^z)^{x-r-t-t'-\ldots.-t^z}$$

gleich mögliche Arten sich ereignen (§. 2.): und eine jede von diesen Arten kann, ohne die Ordnung zu verändern, in der die Fälle auf einander folgen, woraus eine jede davon bestehet, mit einer jeden von den $\frac{(r+t+\ldots.+t^z)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'\ldots.1.2\ldots t^z}.n^r\ldots.q^{z\,t^z}$ Arten, welche das bestimmte Resultat geben, auf $\frac{x\ldots(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1.2\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)}$ Arten verbunden werden.

Denn man setze nach der Reihe die Ergänzungen von $r+t+t'+\ldots.+t^z$ zu x, oder $x-r-t-t'-\ldots.-t^z=$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots. \\ x-r-t\ldots.-t^z \end{Bmatrix};$$ so giebt folgende Tafel:

$$\left\{\begin{array}{llll} 1; & 2; & 3; \ldots\ldots & (r+t+t'+\ldots+t^z+1) \\ 1,2; & 1,3; \ldots\ldots & 1, & (r+t+t'+\ldots+t^z+2) \\ & 2,3; \ldots\ldots & & \\ & \text{etc.} & & \\ 1,2,3; & 1,2,4; \ldots\ldots & 1,2, & r+t+t'+\ldots+t^z+3 \\ & 1,3,4; & & \\ & \text{etc.} & & \\ \text{etc.} & & & \end{array}\right\}$$

nach der Ordnung die Summen der in ihr vorkommenden Combinationen:

$$\left\{\begin{array}{l} r+t+t'+\ldots+t^z+1 \\ \dfrac{(r+t+t'+\ldots+t^z+2)(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1\ .\ 2} \\ \dfrac{(r+t+t'+\ldots+t^z+3)(r+t+t'+\ldots+t^z+2)(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

und alſo allgemein:

$$\frac{(r+t+t'+\ldots+t^z+(x-r-t-t'-\ldots-t^z))\ldots(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)}$$

das iſt $\dfrac{x\ldots(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1.2\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)}$. *W. Z. E.*

§. 31.

Beispiele. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei gemeinen Spielwürfeln, in acht Würfen,

$$\left\{\begin{array}{l} 2 \text{ mal } 5 \text{ und } 4 \\ 2 - 3 - 4 \\ 1 - 6 - 6 \\ 1 - 5 - 5 \end{array}\right\} \text{ zu werfen?}$$

Man

Man ſetze in der allgemeinen Formel $x=8$; $m=36$; $r=2$; $t=2$; $t'=1$; $t''=1$; $n=2$; $q=2$; $q'=1$; $q''=1$; ſo verwandelt ſie ſich in

$$\frac{8.7}{1.2} \cdot 30^2 \frac{6.5.4.3}{1 . 2} \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{36^8} = \frac{875}{34012224},$$

welches die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt.

* Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in zwölf Würfen $\left\{\begin{array}{l} \text{1 mal ein As} \\ \text{1 — eine 2} \\ \text{1 — — 3} \\ \text{1 — — 4} \\ \text{1 — — 5} \\ \text{1 — — 6} \end{array}\right\}$ zu werfen?

Es iſt $m=6$; $x=12$; $r=t=t'=t''=t'''=t^{IV}=1=n=q=q'=q''=q'''=q^{IV}$; folglich die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \cdot 0^6 \cdot \frac{6.5.4.3.2}{1} \cdot \frac{1}{6^{12}} = 0$; alſo iſt eine ſolche Begebenheit unmöglich.

* Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in zwölf Würfen, oder mit zwölf Würfeln in einem Wurfe $\left\{\begin{array}{l} \text{1 mal ein As} \\ \text{1 — eine 2} \\ \text{1 — — 3} \end{array}\right\}$ zu werfen?

Hier iſt $x=12$; $m=6$; $r=1=t=t'=n=q=q'$; alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{12....4}{1.2....9} \cdot 3^9 \cdot \frac{3.2}{1} \cdot \frac{1}{6^{12}} = \frac{12.11.10}{1.2.3} \cdot 3^9 \cdot \frac{1}{6^{11}} = \frac{55}{2^9.9} = \frac{55}{4608}.$$

§. 32.

Lehrsatz. *Wenn die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einem Verſuche* $\frac{n}{m}$ *iſt; ſo iſt die Wahrſchein-*

lichkeit, dass ebendieselbe Begebenheit in x Versuchen just r mal geschehen wird =

$$ {}^{x}R \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r} \text{ oder } {}^{x}R \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^r \cdot \left(1-\frac{n}{m}\right)^{x-r} $$

Beweis. 1. Man setze in der allgemeinen Formel $\frac{(r+t)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots t} \cdot n^r \cdot q^t$ (§. 25.), $q = m - n$, und $t = x - r$; so bekömmt man:

$$ \frac{x\,(x-1)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(x-r)} \cdot n^r \cdot (m-n)^{x-r} \text{ oder} $$

$$ \frac{x\,(x-1)\ldots\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,r} \cdot n^r \cdot (m-n)^{x-r}, $$ welches der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist.

2. Der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist m^x (§. 2.); folglich ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$ \frac{x\,(x-1)\ldots\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}. \quad \textit{W. Z. E.} $$

§. 33.

Beispiele. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln in vier Würfen just zweimal 5 und 4 zu werfen?

In der eben gefundenen allgemeinen Formel setzt man $m = 36$, $n = 2$ (oder da $36 : 2 = 18 : 1$, $m = 18$, $n = 1$) $x = 4$, $r = 2$, so bekömmt man ${}^{x}R \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \times \frac{1^2}{18^4} \cdot 17^2 = \frac{289}{17496}$, welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

* Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen beidemal ein As zu werfen

$= 1 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(1 - \frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}$; eben so groſs als die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei Würfeln in einem Wurfe 1 und 1 zu werfen =

$$1 . \left(\frac{1}{36}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{36}\right)^0 = \frac{1}{36}.$$

§. 34.*

Für $r = 1$ verwandelt ſich die allgemeine Formel (§. 32.) in $x . \frac{n}{m^x} . (m-n)^{x-1}$ oder $x . \frac{n}{m} . \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{x-1}$; welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche $= \frac{n}{m}$ iſt, in x Verſuchen juſt einmal zum Vorſchein kommen wird.

Z. B. Die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen juſt einmal ein As zu werfen, iſt $2 . \frac{1}{6} . \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2-1} = \frac{1}{3} . \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$ = der Wahrſcheinlichkeit mit zwei Würfeln in einem Wurfe juſt ein As zu werfen.

Addirt man die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen juſt einmal ein As zu werfen, oder $\frac{5}{18}$, zu der Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in zwei Würfen auf jeden Wurf ein As zu werfen; ſo erhält man die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen entweder nur einmal ein As, oder beidemal ein As, das iſt, wenigſtens ein As zu werfen =

$$\frac{5}{18} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$ wie zuvor §. 12.

Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel in drei Würfen nur einmal ein As zu werfen, ist $= 3 \cdot \frac{1}{6} \times \left[1 - \frac{1}{6}\right]^2 = \frac{25}{72} < \frac{91}{216}$ (§. 12. u. 4.).

§. 35.*

Wenn $r = x$; so giebt die allgemeine Formel in §. 32: $\left[\frac{n}{m}\right]^x$. S. §. 3.

Wenn $r = 0$; so bekömmt man aus eben dieser Formel $\left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ oder $\left[\frac{m-n}{m}\right]^x$. Ebendaselbst.

§. 36.*

Ist in jedem Versuche die Anzahl der Fälle verschieden, näml. im

	1sten	2ten	3ten	4ten	5ten etc. Versuche
die Anzahl aller Fälle	$= m$	m'	m''	m'''	m^{IV}
die Anzahl der günstigen	$= n$	n'	n''	n'''	n^{IV}
die Anzahl der widrigen	$= m-n$	$m'-n'$	$m''-n''$	$m'''-n'''$	$m^{\text{IV}}-n^{\text{IV}}$

und soll der Spielende, z. B. bei fünf Versuchen in den drei ersten, die bestimmte Begebenheit hervorbringen, so ist seine Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{n \cdot n' \cdot n'' \cdot (m''' - n''') \cdot (m^{\text{IV}} - n^{\text{IV}})}{m \cdot m' \, m'' \cdot m''' \cdot m^{\text{IV}}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} \cdot \frac{n''}{m''} \left(1 - \frac{n'''}{m'''}\right) \cdot \left(1 - \frac{n^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}}\right).$$

Denn ein jeder von den n günstigen Fällen der ersten Begebenheit kann mit jedem von den n' günstigen Fällen der zweiten Begebenheit verbunden werden; dieses giebt $n \cdot n'$ Fälle; davon ein jeder wiederum mit einem jeden von den n'' günstigen Fällen der dritten Begeben-

heit verbunden werden kann, welches $n \, . \, n' \, . \, n''$ Fälle giebt. Desgleichen kann ein jeder von den $m''' - n'''$ widrigen Fällen der vierten Begebenheit mit den $m^{IV} - n^{IV}$ widrigen Fällen der fünften Begebenheit verbunden werden, wodurch man das Produkt $(m''' - n''')\,(m^{IV} - n^{IV})$ erhält. Da nun endlich auch ein jeder dieser $(m''' - n''')\,(m^{IV} - n^{IV})$ Fälle mit jedem der $n \, . \, n' \, . \, n''$ erstern verbunden werden kann; so ist der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit $= n \, . \, n' \, . \, n'' \, . \, (m''' - n''') \, . \, (m^{IV} - n^{IV})$. Auf eine ähnliche Art ergiebt sich für den Nenner dieser Wahrscheinlichkeit, das Produkt $m \, . \, m' \, . \, m'' \, . \, m''' \, . \, m^{V}$. *W. Z. E.*

Man vielfältigt also das Produkt aus der Anzahl der günstigen Fälle in den einzelnen Versuchen, wo die Begebenheit geleistet werden soll, mit dem Produkte der Anzahl der widrigen Fälle in den Versuchen, in welchen die Begebenheit nicht geleistet werden soll, und dividirt das herausgekommene Produkt durch das Produkt aus der Anzahl aller Fälle in allen Versuchen: so giebt der Quotient die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

§. 37.*

Beispiele. Im {
1sten Versuche soll mit 1
2ten — — — 2
3ten — — — 3
4ten — — — 4
5ten — — — 5
} Würfeln geworfen werden; man sucht die Wahrscheinlichkeit:

im {
1sten Versuche ein As
2ten Versuche wenigstens ein As
3ten Versuche wenigstens ein As
4ten Versuche kein As
5ten Versuche kein As
} zu werfen.

Hier ist (aus §. 12.)

	im 1sten	2ten	3ten	4ten	5ten Versuche
die Anzahl aller Fälle =	6	36	216	1296	7776
der günstigen =	1	11	91	671	4651
der widrigen =	5	25	125	625	3125

folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{1 \,.\, 11 \,.\, 91 \,.\, 625 \,.\, 3125}{6 \,.\, 36 \,.\, 216 \,.\, 1296 \,.\, 7776} \text{ oder } \frac{1}{6} \,.\, \frac{11}{36} \,.\, \frac{91}{216} \,.\, \frac{625}{1296} \times \frac{3125}{7776}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in jedem der drei letzten Versuche wenigstens ein As zu werfen, ist =

$$\frac{5}{6} \,.\, \frac{25}{36} \,.\, \frac{91}{216} \,.\, \frac{671}{1296} \,.\, \frac{4651}{7776}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass solches im 1sten, 3ten und 5ten Versuche geschehen wird, ist

$$\frac{1}{6} \,.\, \frac{25}{36} \,.\, \frac{91}{216} \,.\, \frac{625}{1296} \,.\, \frac{4651}{7776}.$$

Und so weiter.

§. 38.*

Wenn (§. 36.)

$$m = m' = m'' = m''' = m^{\text{IV}} = \text{etc.}$$

$$n = n' = n'' = n''' = n^{\text{IV}} = \text{etc.}$$

$$m - n = m' - n' = m'' - n'' = m''' - n''' = m^{\text{IV}} - n^{\text{IV}} = \text{etc.}$$

so verwandelt sich die allgemeine Formel:

$$\frac{n \,.\, n' \,.\, n'' \,.\, (m''' - n''') \,.\, (m^{\text{IV}} - n^{\text{V}})}{m \,.\, m' \,.\, m'' \,.\, m''' \,.\, m^{\text{IV}}} \text{ in } \frac{n^3 \,.\, (m-n)^2}{m^5}.$$

Bedeutet also x die Anzahl der Versuche; r die Zahl derselben, in welchen eine bestimmte Begebenheit geleistet werden soll; also $x - r$ die Zahl derjenigen Versuche, in welchen diese Begebenheit nicht geleistet werden soll: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die bestimm-

te Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche $= \frac{n}{m}$ iſt, in r angewieſenen Verſuchen ſich ereignen wird, $= \frac{n^r (m-n)^{x-r}}{m^x}$ oder $\left[\frac{n}{m}\right]^r \cdot \left[1-\frac{n}{m}\right]^{x-r}$.

§. 39.*

Beispiel. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit zwei Würfeln in vier Würfen juſt zweimal, und zwar beim zweiten und vierten Wurfe, 5 und 4 zu werfen?

Man ſetze in der eben gefundenen allgemeinen Formel, $m=18$, $n=1$, $x=4$, $r=2$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\left[\frac{1}{18}\right]^2 \cdot \left[1-\frac{1}{18}\right]^2 = \frac{289}{104976} = \frac{1}{6} \cdot \frac{289}{17496}.$$

Man vergleiche §. 33. Beiſpiel 1.

§. 40.*

Soll die beſtimmte Begebenheit in r Verſuchen zum Vorſchein kommen, ſo, daſs keine gewiſſen Verſuche, worinnen ſie geſchehen ſoll, namhaft gemacht werden; ſo muſs, um die Wahrſcheinlichkeit für dieſen Fall zu erhalten, die (§. 38.) gefundene allgemeine Formel noch mit der Menge aller Verbindungen nach r von x Dingen gevielfältigt werden; weil ſich alsdann die Begebenheit im

$$\left[\begin{matrix} 1, 2, \ldots r; \; 1, 2, \ldots (r-1), (r+1); \ldots 1, 2, \ldots (r-1), x \\ 1, 2, \ldots (r-2), r, (r+1); \ldots \end{matrix}\right] \text{ten}$$

Verſuche ereignen kann. Man bekömmt alſo für die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\frac{x.(x-1)\ldots(x-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots r} \cdot \left[\frac{n}{m}\right]^r \cdot \left[1-\frac{n}{m}\right]^{x-r};$$

wie in §. 32.

§. 41.

LEHRSATZ. *Die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit in einem Versuche* $\frac{n}{m}$ *ist, in x Versuchen höchstens r mal geschiehet, ist =*

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x\cdot\left(1+x.\frac{n}{m-n}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\left[\frac{n}{m-n}\right]^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left[\frac{n}{m-n}\right]^3+\ldots+\frac{x\ldots(x-r+1)}{1.2.3\ldots r}\left[\frac{n}{m-n}\right]^r\right).$$

BEWEIS. Wenn man in der (§. 32. oder 40.) gefundenen allgemeinen Formel anſtatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 0 bis r ſetzt, und die ſolchergeſtalt erhaltenen Produkte zuſammen addirt; ſo bekömmt man zur Summe die geſuchte Wahrſcheinlichkeit, welche alſo ſein wird:

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x\cdot\left(1+x.\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{x\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}.\left[\frac{n}{m-n}\right]^r\right).$$

W. Z. E.

§. 42.*

Setzt man in der vorhin (§. 41.) gefundenen allgemeinen Formel $r=1$; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche $= \frac{n}{m}$ iſt, in x Verſuchen höchſtens einmal geſchehen wird, =

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x\cdot\left[1+x.\frac{n}{m-n}\right].$$

§. 43.

BEISPIEL. Es kauft jemand drei Nummern im Zahlen-Lotto. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſe drei Nummern höchſtens einmal in den vier nächſten Ziehungen herauskommen werden?

Hier ist $n=1$; $m=11748$ (Kap. V. §. 20. Beisp. 1.); $x=4$; $r=1$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left[1+x.\frac{n}{m-n}\right] = \left[\frac{11747}{11748}\right]^4 \cdot \left[1+4.\frac{1}{11747}\right] =$$

$$\frac{11747^3}{11748^4}.11751 = \frac{6349426172124991}{6349426448124672}.$$

§. 44.*

Für $r=x$ verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 41.) in $\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left[1+\frac{n}{m-n}\right]^x = \left[\frac{m-n}{m}\cdot\frac{m}{m-n}\right]^x = 1$, wie gehörig.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Begebenheit (in §. 41.) in x Versuchen höchstens $(x-1)$ mal ereignen wird, ist

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1+x.\frac{n}{m-n}+\frac{x.(x-1)}{1\ .\ 2}.\left[\frac{n}{m-n}\right]^2+\ldots\right.$$

$$\left.+\,x.\left[\frac{n}{m-n}\right]^{x-1}\right) =$$

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(\left[1+\frac{n}{m-n}\right]^x - \left[\frac{n}{m-n}\right]^x\right) =$$

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \left[\frac{n}{m-n}\right]^x =$$

$$1-\left[\frac{n}{m-n}-\frac{n^2}{m\,(m-n)}\right]^x =$$

$$1-\left[\frac{mn-n^2}{m\,(m-n)}\right]^x = 1-\left[\frac{n}{m}\right]^x,$$

wie §. 11; und hievon ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\left[\frac{n}{m}\right]^x$, dass sich die Begebenheit in allen x Versuchen ereignen wird, wie §. 3.

§. 45.

Lehrsatz. *Wenn die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit in einem Versuche* $= \frac{n}{m}$ *ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit wenigstens r mal in x Versuchen geschehen wird,* =

$$1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x . \left(1 + x . \frac{n}{m-n} + \frac{x(x-1)}{1 . 2} . \left[\frac{n}{m-n}\right]^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{1 . 2 \ldots (r-1)} \left[\frac{n}{m-n}\right]^{r-1}\right)$$

Beweis. Sie ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von derjenigen, dass die Begebenheit in x Versuchen höchstens $(r-1)$ mal geschehen wird, und die man aus der allgemeinen Formel §. 41. findet, wenn man $r-1$ anstatt r schreibt. *W. Z. E.*

§. 46.

Zusatz. Für $r=1$ verwandelt sich die eben gefundene allgemeine Formel in folgende: $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$, welche bereits im dritten Lehrsatze (§. 5) bewiesen worden ist; und wenn $r=x$, so verwandelt sich eben diese Formel in:

$$1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x \left(\left[1 + \frac{n}{m-n}\right]^x - \left[\frac{n}{m-n}\right]^x\right) =$$

$$+ \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x \left[\frac{n}{m-n}\right]^x = \left[\frac{n}{m}\right]^x;$$

(S. Kap. II. §. 7. und im gegenwärt. Kap. §. 3.).

§. 47.

Hätte man in der allgemeinen Formel des §. 32. anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von r bis x gesetzt, und die vermittelst dieser Substitutionen heraus-

gekommenen Produkte zusammen addirt; so würde man den Ausdruk

$$\left[\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1+x \cdot \frac{m-n}{n} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} \cdot \left[\frac{m-n}{n}\right]^2 + \ldots\ldots + \frac{x\cdot(x-1)\ldots\ldots(x-r+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots r} \cdot \left[\frac{m-n}{n}\right]^{x-r}\right)$$

$$\left(=\left[n^x + x\,n^{x-1}(m-n) + \frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2} \cdot n^{x-2}(m-n)^2 + \ldots + \frac{x\ldots\ldots(x-r+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots r} \cdot n^r\,(m-n)^{x-r}\right] : m^x\right.$$

$$= \left[m^x - (m-n)^x - x.(m-n)^{x-1}n - \frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2}(m-n)^{x-2}n^2 - \ldots \ldots - \frac{x\ldots(x-r+2)}{1\cdot 2\ldots(r-1)} \cdot n^{r-1} \cdot (m-n)^{x-r+1}\right] : m^x\Bigg)$$

gefunden haben, welcher mit dem im Lehrsatz §. 45. zu einerlei Wahrscheinlichkeit gehört, aber eine andere Gestalt als dieser hat. Folglich wird auch

$$1 - \left[\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left\{1 + x \cdot \frac{m-n}{n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x\ldots\ldots(x-r+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots r} \cdot \left[\frac{m-n}{n}\right]^{x-r}\right\}$$

$$\left(=\left[(m-n)^x + x\cdot(m-n)^{x-1}n + \frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2} \times (m-n)^{x-2}n^2 + \ldots + \frac{x\ldots\ldots(x-r+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(r-1)} \times (m-n)^{x-r+1} \cdot n^{r-1}\right] : m^x\right)$$

mit

$$\left[1 - \frac{n}{m}\right]^x \cdot \left\{1 + x \cdot \frac{n}{m-n} + \ldots\ldots\ldots\right.$$

$$+\frac{x \ldots (x-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots (r-1)} \cdot \left[\frac{n}{m-n}\right]^{r-1} \Bigg\} \text{(§. 41.)}$$

zu einerlei Wahrſcheinlichkeit gehören.

§. 48.*

Es iſt alſo die Wahrſcheinlichkeit desjenigen, der in zwei Verſuchen etwas zweimal zu leiſten unternimmt, $\frac{n^2}{m^2}$; und die Wahrſcheinlichkeit des Gegenſpielers $= \frac{(m-n)^2 + 2(m-n)n}{m^2}$.

Desgleichen iſt die Wahrſcheinlichkeit desjenigen, der in drei Verſuchen etwas (wenigſtens) zweimal zu leiſten unternimmt, $= \frac{n^3 + 3n^2(m-n)}{m^3}$; und des Gegenſpielers $= \frac{(m-n)^3 + (m-n)^2 n}{m^3}$.

Ferner iſt die Wahrſcheinlichkeit desjenigen, der in vier Verſuchen etwas zweimal zu leiſten unternimmt, $=$

$$\frac{n^4 + 4(m-n)n^3 + 6(m-n)^2 n^2}{m^4};$$

des Gegenſpielers Wahrſcheinlichkeit $=$

$$\frac{(m-n)^4 + 4(m-n)^3 n}{m^4}.$$

Will jemand in drei Verſuchen etwas dreimal leiſten, ſo iſt ſeine Wahrſcheinlichkeit $= \frac{n^3}{m^3}$, und die entgegengeſetzte $=$

$$\frac{(m-n)^3 + 3(m-n)^2 n + 3(m-n)n^2}{m^3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in x Verſuchen wenigſtens zweimal geſchiehet, iſt =

$$[n^x + x(m-n)n^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}.(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1.2}.(m-n)^{x-2}n^2] : m^x;$$

die entgegengeſetzte hievon, daſs ſie höchſtens einmal geſchiehet, iſt =

$$\frac{(m-n)^x + x.(m-n)^{x-1}n}{m^x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in x Verſuchen wenigſtens dreimal geſchiehet, iſt =

$$[n^x + x.(m-n)n^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.n^3(m-n)^{x-3}] : m^x;$$

die entgegengeſetzte, daſs ſie in x Verſuchen höchſtens zweimal geſchiehet, =

$$[(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n + \frac{x(x-1)}{1.2}.(m-n)^{x-2}n^2] : m^x.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in x Verſuchen wenigſtens viermal geſchiehet, iſt =

$$[n^x + x.(m-n)n^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}.n^4(m-n)^{x-4}] : m^x;$$

daſs dieſelbe in x Verſuchen höchſtens dreimal geſchiehet, =

$$[(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n + \frac{x(x-1)}{1.2}(m-n)^{x-2}n^2 +$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (m-n)^{x-3} n^3] : m^x.$$

Und so weiter.

Ueberhaupt ist die Wahrscheinlichkeit desjenigen, der in x Versuchen etwas wenigstens r mal zu leisten unternimmt =

$$[n^x + x n^{x-1}(m-n) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} n^{x-2}(m-n)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r}(m-n)^{x-r} n^r] : m^x;$$

die Wahrscheinlichkeit des Gegenspielers, diese Begebenheit in x Versuchen höchstens $(r-1)$ mal zu leisten, =

$$[(m-n)^x + x(m-n)^{x-1} n + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}(m-n)^{x-2} n^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (r-1)} \cdot (m-n)^{x-r+1} n^{r-1}] : m^x.$$

Man sehe beigefügte *Tafel I*, welche die Wahrscheinlichkeit desjenigen enthält, der einem andern in einigen Versuchen etwas ein- oder mehrmal zu leisten vorschreibt; und *Tafel II*, welche die Wahrscheinlichkeit desjenigen angiebt, der es zu leisten annimmt.

Die weitere Ausführung dieser beiden Tafeln fällt in die Augen, nämlich die wagrechten Kolumnen enthalten nach der Ordnung die Glieder aller Potenzen des Binomiums $[(m-n)+n]:m$, und zwar die zweite wagrechte Kolumne die Quadrate, die dritte die Würfel, die vierte die Biquadrate, u. s. f.; so dass in der *ersten* Tafel die erste senkrechte Kolumne blos die ersten Glieder, die zweite senkrechte blos die zwei ersten, die dritte die drei ersten, die vierte die vier ersten Glieder dieser Potenzen, u. s. f. in sich begreift; und die einzelnen Glieder der *zweiten* Tafel nach der Ordnung allemal die Ergänzungen jener der ersten Tafel zur vollständigen Potenz von $[(m-n)+n]:m$ sind.

zu Seite 206.

TAFEL I.

Versuche	einmal	zweimal	dreimal	viermal	
1	$(m-n):m$				
2	$(m-n)^2:m^2$	$((m-n)^2+2(m-n)n):m^2$			
3	$(m-n)^3:m^3$	$((m-n)^3+3(m-n)^2n):m^3$	$((m-n)^3+3(m-n)^2n+3(m-n)n^2):m^3$		
4	$(m-n)^4:m^4$	$((m-n)^4+4(m-n)^3n):m^4$	$((m-n)^4+4(m-n)^3n+6(m-n)^2n^2):m^4$	$((m-n)^4+4(m-n)^3n+6(m-n)^2n^2+4(m-n)n^3):m^4$	etc.
5	$(m-n)^5:m^5$	$((m-n)^5+5(m-n)^4n):m^5$	$((m-n)^5+5(m-n)^4n+10(m-n)^3n^2):m^5$	$((m-n)^5+5(m-n)^4n+10(m-n)^3n^2+10(m-n)^2n^3):m^5$	
6	$(m-n)^6:m^6$	$((m-n)^6+6(m-n)^5n):m^5$	$((m-n)^6+6(m-n)^5n+15(m-n)^4n^2):m^6$	$((m-n)^6+6(m-n)^5n+15(m-n)^4n^2+20(m-n)^3n^3):m^6$	
x	$(m-n)^x:m^x$	$((m-n)^x+x(m-n)^{x-1}n):m^x$	$((m-n)^x+x(m-n)^{x-1}n+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(m-n)^{x-2}n^2):m^x$	$((m-n)^x+x(m-n)^{x-1}n+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(m-n)^{x-2}n^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-n)^{x-3}n^3):m^x$	

r mal

x $$((m-n)^x+x(m-n)^{x-1}n+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(m-n)^{x-2}n^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-n)^{x-3}n^3+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(r-1)}(m-n)^{x-r+1}n^{r-1}):m^x$$

TAFEL II.

Versuche	einmal	zweimal	dreimal	viermal
1	$n : m$			
2	$(n^2 + 2\,(m-n)\,n) : m^2$	$n^2 : m^2$		
3	$(n^3 + 3\,(m-n)\,n^2 + 3\,(m-n)^2 n) : m^3$	$(n^3 + 3\,(m-n)\,n^2) : m^3$	$n^3 : m^3$	
4	$(n^4 + 4\,(m-n)\,n^3 + 6\,(m-n)^2 n^2 + 4\,(m-n)^3 n) : m^4$	$(n^4 + 4\,(m-n)\,n^3 + 6\,(m-n)^2 n^2) : m^4$	$(n^4 + 4\,(m-n)\,n^3) : m^4$	$n^4 : m^4$ etc.
5	$(n^5 + 5\,(m-n)\,n^4 + 10\,(m-n)^2 n^3 + 10\,(m-n)^3 n^2 + 5\,(m-n)^4 n) : m^5$	$(n^5 + 5\,(m-n)\,n^4 + 10\,(m-n)^2 n^3 + 10\,(m-n)^3 n^2) : m^5$	$(n^5 + 5\,(m-n)\,n^4 + 10\,(m-n)^2 n^3) : m^5$	$(n^5 + 5\,(m-n)\,n^4) : m^5$
6	$(n^6 + 6\,(m-n)\,n^5 + 15\,(m-n)^2 n^4 + 20\,(m-n)^3 n^3 + 15\,(m-n)^4 n^2 + 6\,(m-n)^5 n) : m^6$	$(n^6 + 6\,(m-n)\,n^5 + 15\,(m-n)^2 n^4 + 20\,(m-n)^3 n^3 + 15\,(m-n)^4 n^2) : m^6$	$(n^6 + 6\,(m-n)\,n^5 + 15\,(m-n)^2 n^4 + 20\,(m-n)^3 n^3) : m^6$	$(n^6 + 6\,(m-n)\,n^5 + 15\,(m-n)^2 n^4) : m^6$
x	$(n^x + x\,(m-n)\,n^{x-1} + \frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots\ldots + x\,(m-n)^{x-1} n) : m^x$	$(n^x + x\,(m-n)\,n^{x-1} + \ldots\ldots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}.\,(m-n)^{x-2} n^2) : m^x$	$(n^x + x\,(m-n)\,n^{x-1} + \ldots + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-n)^{x-3} n^3) : m^x$	$(n^x + x(m-n)\,n^{x-1} + \ldots + \frac{x(x-1)\,(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(m-n)^{x-4} n^4) : m^x$

r mal

x

$$\left(n^x + x\,(m-n)\,n^{x-1} + \frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}(m-n)^2\,n^{x-2} + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-n)^3 n^{x-3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(x-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\,r}(m-n)^{x-r}\,n^r\right) : m^x$$

Beispiele. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit mit drei Würfeln in einem Wurfe, oder welches einerlei iſt, mit einem oder drei verſchiedenen Würfeln in drei Würfen, wenigſtens zwei Aſſe zu werfen?

Die hieher gehörige Formel aus der *zweiten* Tafel iſt $[n^3 + 3(m-n)n^2]:m^3$. In dieſer ſetze man $n=1$, $m=6$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=$ $[1^3+3(6-1).1^2]:6^3 = \frac{2}{27}$.

Die Formel für die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit iſt aus der *erſten* Tafel $[(m-n)^3+3(m-n)^2 n]:m^3$ $=(5^3+3.5^2.1):6^3=\frac{25}{27}$.

Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit drei Würfeln in einem Wurfe, oder, mit einem Würfel in drei Würfen, wenigſtens ein As zu werfen?

Hier iſt (Tafel II.) $[n^3+3(m-n)n^2+3(m-n)^2 n]:m^3$ $=[1^3+3.5.1^2+3.5^2.1]:6^3=\frac{91}{216}$. Die entgegengeſetzte (Tafel I.) $=(m-n)^3:m^3=5^3:6^3=\frac{125}{216}$.

Die Wahrſcheinlichkeit mit x Würfeln in einem Wurfe wenigſtens zwei Aſſe zu werfen, iſt (Tafel II.) $=$

$$\frac{[(m-n)+n]^x - x(m-n)^{x-1}n - (m-n)^x}{m^x} =$$

$$1 - \frac{x(m-n)^{x-1}n + (m-n)^x}{m^x} = 1 - \frac{x.5^{x-1}.1+5^x}{6^x}.$$

Die entgegengeſetzte (Tafel I.) $=$

$$\frac{(m-n)^x + x.(m-n)^{x-1}.n}{m^x} = \frac{5^x + x.5^{x-1}.1}{6^x}.$$

§. 49.*

Will man wiſſen, mit wie viel Würfeln in einem Wurfe, das iſt, in wie viel Würfen mit einem Würfel, beide Spieler gleiche Wahrſcheinlichkeiten haben werden; oder, mit wie viel Würfeln in einem Wurfe jemand mit Vortheil unternehmen könne, wenigſtens 1, 2, 3 etc. überhaupt r Augen zu werfen; ſo ſetze man

$$\frac{n^x + x(m-n)n^{x-1} + \ldots + {}^x R.(m-n)^{x-r}.n^r}{m^x} = \frac{1}{2} \text{ oder (§.47.)}$$

$$\frac{m^x - (m-n)^x - x(m-n)^{x-1}n - \ldots - {}^x[R-1].(m-n)^{x-r+1}n^{r-1}}{m^x} = \frac{1}{2}$$

und ſuche aus einer von dieſen beiden Gleichungen den Werth von x zu beſtimmen.

Zum Beiſpiel. Mit wie viel Würfeln in einem Wurfe kann es jemand mit Vortheil unternehmen, wenigſtens zwei Aſſe zu werfen?

Hier iſt (Tafel I.) $1 - \frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n}{m^x} = \frac{1}{2}$.

Nun iſt im gegebenen Beiſpiele $m = 6$, $n = 1$, $m - n = 5$, alſo $1 - \frac{5^x + x.5^{x-1}}{6^x} = \frac{1}{2}$. Setzt man nunmehro in dieſer letzten Formel nach und nach anſtatt x die ganzen Zahlen: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, u. ſ. f. ſo bekömmt man

$$\text{Für } x = 2,\ \frac{1}{36} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 3,\ \frac{2}{27} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 4,\ \frac{19}{144} < \frac{1}{2};$$

Für

$$\text{Für } x = 5,\ \frac{763}{3888} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 6,\ \frac{12281}{46656} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 7,\ \frac{7703}{23328} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 8,\ \frac{663991}{1579616} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 9,\ \frac{2304473}{5038848} < \frac{1}{2};$$

$$\text{Für } x = 10,\ \frac{103889767}{201553920} > \frac{1}{2}.$$

Alſo erhellet, daſs man bei gleichen Miſen mit neun Würfeln wenigſtens zwei Aſſe zu werfen mit einigem Nachtheil unternimmt; mit zehn Würfeln aber eben dieſes zu leiſten, ein kleiner Vortheil vorhanden iſt; imgleichen, daſs eine ſolche Wette nie rechtmäſsig werden kann.

Für den Gegenſpieler ſetzt man

$$\frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n + \ldots + {}^x[R-1].(m-n)^{x-r+1}n^{r-1}}{m^x} = \frac{1}{2},$$

und ſucht in dieſer Gleichung x zu beſtimmen.

Zum Beiſpiel. Für das vorige Beiſpiel verwandelt ſie ſich in

$$\frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n}{m^x} = \frac{1}{2} = \frac{5^x + x.5^{x-1}}{6^x},$$

und giebt

$$\text{Für } x = 2,\ \frac{35}{36} > \frac{1}{2};$$

Für $x = 3$, $\frac{25}{27} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 4$, $\frac{125}{144} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 5$, $\frac{3125}{3888} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 6$, $\frac{34375}{46656} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 7$, $\frac{15625}{23328} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 8$, $\frac{915625}{1579616} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 9$, $\frac{2734375}{5038848} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 10$, $\frac{9765625}{20155392} < \frac{1}{2}$, wie gehörig.

Oder, da aus $\frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n}{m^x} = \frac{1}{2}$ folgt: $2(m+(x-1)n).(m-n)^{x-1} = m^x$; so erhellet, dafs, wenn man m auf diejenige Würde erhebt, welche mit dem Produkte der Gröfse $(m-n)^{x-1}$ in die doppelte Summe von $m+(x-1)n$ übereinkommt; der Exponent von m die gesuchte rechtmäfsige Zahl der Versuche (oder Würfel), bei gleichen Misen, für den Fall anzeigen wird, wenn etwas wenigstens zweimal geleistet werden soll. Nun ist im gegebenen Beispiel $m=6$, $n=1$, $m-n=5$, folglich $6^9 = 10077696 \mid 5^8 = 390625$

$6^{10} = 60466176 \mid 5^9 = 1953125$

$2(6+8).5^8 = 28.390625 = 10937500 > 10077696 = 6^9$,

$2(6+9).5^9 = 30.1953125 = 58593750 < 60466176 = 6^{10}$.

Da also für $x=9$, $2.5468750 > 10077696$ oder

$$\frac{5468750}{10077696} = \frac{2734375}{5038848} > \frac{1}{2}$$

hingegen für $x=10$, $2.29296875 < 60466176$ oder

$$\frac{29296875}{60466176} = \frac{9765625}{20155392} < \frac{1}{2};$$

so folget, wie zuvor, dass neun Würfel noch nicht hinreichen, aber zehn Würfel mit Vortheil gewählt werden können, auf einen Wurf wenigstens zwei Asse zu werfen.

Will man die Wahrscheinlichkeit wissen, in wie viel Würfen mit zwei Würfeln man rechtmässig, oder so rechtmässig als möglich, bei gleichen Misen sieben Augen wenigstens zweimal zu werfen, mit einem andern wetten kann; so wird man, nachdem man nach der eben angezeigten Methode verfahren, eben dieselben Resultate erhalten. Es ist nämlich hier $\frac{n}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und auch alles übrige wie vorhin.

§. 50.

Wenn überhaupt bekannt ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{m}$ einer Begebenheit in einem Versuche, und die Wahrscheinlichkeit P, dass eben diese Begebenheit in einer unbekannten Anzahl x von Versuchen $\left\{\begin{array}{l}\text{just } r \text{ mal}\\ \text{höchstens } r-1 \text{ mal}\\ \text{wenigstens } r \text{ mal}\end{array}\right\}$ sich ereignen wird: so ergiebt sich die Zahl x der Versuche, wodurch diese Begebenheit die Wahrscheinlichkeit P erhält, und in welchen sie sich $\left\{\begin{array}{l}\text{just } r \text{ mal}\\ \text{höchstens } r-1 \text{ mal}\\ \text{wenigstens } r \text{ mal}\end{array}\right\}$ ereignen wird: wenn man in der allgemeinen Formel,

die im Lehrsatz $\begin{cases} \text{§. 32.} \\ \text{§. 41.} \\ \text{§. 45.} \end{cases}$ bewiesen worden; anstatt x nach und nach die Zahlen r, $r+1$, $r+2$, $r+3$, u. s. f. setzt, so lange bis man einen Bruch erhält, der dem gegebenen P gleich ist, oder ihm am nächsten kommen wird.

§. 51.

Sind $\begin{Bmatrix} \frac{n}{m} \\ r \end{Bmatrix}$, P und x bekannt, hingegen $\begin{Bmatrix} r \\ \frac{n}{m} \end{Bmatrix}$ unbekannt; so läſst sich auf eine ähnliche Art durch allmählige Substitutionen, der Werth der unbekannten Gröſse finden. Wenn demnach von diesen vier Gröſsen, nämlich: 1) der Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in einem Versuche sich ereignen wird $\left(\frac{n}{m}\right)$; 2) der Wahrscheinlichkeit, daſs diese Begebenheit just, oder wenigstens, oder höchstens eine gewisse Anzahl von malen in einer gegebenen Menge von Versuchen sich ereignen wird (P); 3) der Anzahl von malen, daſs die Begebenheit sich wahrscheinlich ereignen soll (r); 4) der Anzahl der Versuche (x); je drei gegeben sind, so wird sich jederzeit die vierte Gröſse daraus finden lassen.

§. 52.*

Aufgabe. *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, mit zwei gemeinen Spielwürfeln in acht Würfen, just viermal sechs Augen, und just zweimal einen Pasch zu werfen.*

Vorbereitung. Hier ist die Anzahl aller Fälle in einem Versuche $= 36$;

Die Wahrscheinlichkeit für die erste Begebenheit in einem Versuche $= \frac{5}{36}$;

Die Wahrscheinlichkeit für die zweite Begebenheit in einem Versuche $= \frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$;

Ferner giebt es *einen* Fall, welcher die beiden bestimmten Begebenheiten zugleich giebt, wenn nämlich sechs auf die Art geworfen wird, dass beim ersten Würfel drei Augen, und beim zweiten Würfel auch drei Augen oben stehen, welches zugleich ein Pasch ist.

Folglich ist $5-1$ oder 4 die Anzahl der Fälle, welche die erste Begebenheit ohne die zweite; und $6-1$ oder 5 die Anzahl der Fälle, welche die zweite Begebenheit ohne die erste geben; endlich $36-(5+6-1)= 36-5-6+1$ oder 26 die Anzahl der Fälle, welche keine von den beiden Begebenheiten geben.

Auflösung. I. Es kann sich zutragen, dass sich nicht derjenige Fall ereignet, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt; und dann ist die Anzahl der gleich möglichen Arten just viermal die erste Begebenheit, und zweimal die zweite Begebenheit in acht Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 26^2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 4^4 \cdot 5^2 = 1817088000;$$

man setzt nämlich in dem Zähler des Bruchs der Wahrscheinlichkeit (§. 30.) $x=8$; $r=4$; $t=2$; t', t'', etc. $=0$; $m-n-q-\ldots=26$; $n=4$; $q=5$; q', q'', etc. $=0$.

II. Es kann sich zutragen, dass sich derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Versuchen einmal ereignet; welches entweder im 1sten, oder 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6sten, 7ten oder 8ten Versuche geschehen kann. Nun ist die Anzahl der möglichen Arten just $4-1$ oder dreimal die erste ohne zugleich die zweite, und $2-1$ das ist einmal die zweite Begebenheit ohne zugleich die erste, in 7 Versuchen zu er-

halten, $=\frac{7.6.5}{1.2.3}.26^3.\frac{4}{1}.4^3.5^1$ (§. 30.); und zu einer jeden von dieſen Arten kann ſich derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, auf acht Arten ereignen. Wenn ſich alſo derjenige Fall, der die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Verſuchen einmal, oder in einem Verſuche, es ſei welcher es wolle, ereignet; ſo iſt die Anzahl der Arten viermal die erſte, und zweimal die zweite Begebenheit in acht Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{7.6.5}{1.2.3}.26^3.\frac{4}{1}.4^3.5^1.8=6299238400.$$

III. Es kann ſich endlich zutragen, daſs ſich derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Verſuchen zweimal, oder in zwei Verſuchen ereignet, welches

{ entweder im 1, u. 2, oder 1, u. 3, ... oder 1, u. 8 ⎫ ten

— 2, – 3, – — 2, – 8 ⎬

etc. }

Verſuche geſchehen kann. Nun iſt die Anzahl der Arten, 4 – 2 das iſt zweimal die erſte Begebenheit ohne zugleich die zweite, und 2 – 2, das iſt 0 mal die 2te Begebenheit in ſechs Verſuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.26^4.4^2.5^0;$$

und zu einer jeden dieſer Arten können ſich die zwei Fälle, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, auf $\frac{8.7}{1.2}$ Arten ereignen. Wenn ſich alſo derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Verſuchen zweimal ereignet, es ſei in welchem Paare es wolle; ſo iſt die Anzahl der Arten, viermal die erſte Begebenheit, und zweimal die zweite Begebenheit in

acht Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.26^4.4^2.\frac{8.7}{1.2}=3070878720.$$

IV. Demnach ist der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit (aus I, II, III.) = 1817088000 + 6299238400 + 3070878720 = 11187205120.

V. Der Nenner dieser Wahrscheinlichkeit ist (§. 2.) $= 36^8 = 2821109907456$.

VI. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{11187205120}{2821109907456} = \frac{10925005}{2754990144}.$$ *W. Z. F.*

§. 53.*

Ist überhaupt 1) die Anzahl aller Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen, $= m$; 2) Sind $\frac{n}{m}$ und $\frac{q}{m}$, die Wahrscheinlichkeiten zweier Begebenheiten, die von dieser Handlung u. s. f. abhängen, in einem Versuche; 3) Giebt es *einen* Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt; 4) Ist $\left\{\begin{matrix} y \text{ oder } n-1 \\ z \text{ oder } q-1 \end{matrix}\right\}$ die Anzahl der Fälle, welche die $\left\{\begin{matrix} \text{1ste} \\ \text{2te} \end{matrix}\right.$ Begebenheit allein, ohne die $\left.\begin{matrix} \text{2te} \\ \text{1ste} \end{matrix}\right\}$ geben; 5) Ist ferner u oder $m-(n+q-1) = m-n-q+1$ die Anzahl der Fälle, welche keine von den beiden Begebenheiten geben: so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs in x Versuchen die erste Begebenheit just r mal, und die zweite just t mal sich ereignen wird, =

$$\left(\frac{x \ldots\ldots\ldots (r+t+1)}{1.2\ldots\ldots(x-r-t)}.u^{x-r-t} \times \right.$$

$$\frac{(r+t)\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots t}.y^r.z^t +$$

$$\frac{(x-1)\ldots\ldots(r+t-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(x-r-t+1)}\,.\,u^{x-r-t+1}\times$$

$$\frac{(r+t-2)\ldots\ldots r}{1\,.\,2\ldots\ldots(t-1)}\,.\,y^{r-1}\,.\,z^{t-1}\,.\,x+$$

$$\frac{(x-2)\ldots\ldots(r+t-3)}{1\,.\,2\ldots\ldots(x-r-t+2)}\,.\,u^{x-r-t+2}\times$$

$$\frac{(r+t-4)\ldots(r-1)}{1\,.\,2\ldots(t-2)}\,.\,y^{r-2}\,.\,z^{t-2}\,.\,\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}+\ldots+$$

$$\frac{(x-t+1)\ldots\ldots(r-t+3)}{1\,.\,2\ldots\ldots(x-r-1)}\,.\,u^{x-r-1}\times$$

$$\frac{r-t+2}{1}\,.\,y^{r-t+1}\,.\,z^{1}\,.\,\frac{x(x-1)\ldots(x-t+2)}{1\,.\,2\ldots(t-1)}+$$

$$\frac{(x-t)\ldots\ldots(r-t+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(x-r)}\,.\,u^{x-r}\times$$

$$\left.1\,.\,y^{r-t}\,.\,z^{0}\,.\,\frac{x(x-1)\ldots(x-t+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots t}\right)\,.\,\frac{1}{m^{x}}.$$

§. 54.

AUFGABE. *Ist 1) m die Anzahl aller Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder von einem gegebenen Zustande abhängen; 2) Sind* $\frac{n}{m}$ *und* $\frac{q}{m}$ *die Wahrscheinlichkeiten in einem Versuche, zweier Begebenheiten, die von eben dieser Handlung, Bewegung, oder eben diesem Zustande abhängen; 3) Ist* φ *die Anzahl der Fälle, welche diese beiden Begebenheiten zugleich geben; 4)* $\begin{bmatrix} y = n - \varphi \\ z = q - \varphi \end{bmatrix}$ *die Anzahl der Fälle, welche die* $\begin{bmatrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\end{bmatrix}$ *Begebenheit allein, ohne zugleich die* $\begin{bmatrix}\text{zweite}\\ \text{erste}\end{bmatrix}$ *geben; 5) und* $u = m - n - q + \varphi$ *die Anzahl der Fälle,*

welche keine von den zwei Begebenheiten geben: so findet man die Wahrscheinlichkeit, daſs in x Versuchen die erste Begebenheit just r mal und die zweite just t mal geschiehet, folgendergestalt:

Auflösung. I. Es kann sich zutragen, daſs keiner von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, sich ereignet. Alsdann ist die Anzahl der Arten r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite in x Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{x \ldots (r+t+1)}{1.2.3 \ldots (x-r-t)} . u^{x-r-t} . \frac{(r+t) \ldots (r+1)}{1.2 \ldots t} . y^r . z^t \text{ oder}$$

$$\frac{x \ldots \ldots \ldots (r+1)}{1.2 \ldots t.1.2 \ldots (x-r-t)} . y^r . z^t . u^{x-r-t}.$$

II. Es kann sich zutragen, daſs einer von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen einmal, oder in einem Versuche, es sei in welchem es wolle, sich ereignet; und in diesem Falle kann ein jeder von diesen φ Fällen in x verschiedenen Versuchen sich ereignen, welches das Produkt $x . \varphi$ giebt. Da nun die Anzahl der Arten, $(r-1)$ mal die erste Begebenheit, und $(t-1)$ mal die zweite, in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{(x-1) \ldots (r+t-1)}{1.2 \ldots (x-r-t+1)} . u^{x-r-t+1} . \frac{(r+t-2) \ldots r}{1.2 \ldots (t-1)} . y^{r-1} . z^{t-1} \text{ oder}$$

$$\frac{(x-1) \ldots \ldots \ldots r}{1.2 \ldots (t-1).1.2 \ldots (x-r-t+1)} . y^{r-1} . z^{t-1} . u^{x-r-t+1};$$

und zu einer jeden von diesen Arten ein jeder von den φ Fällen, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, in x verschiedenen Versuchen sich ereignen kann: so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, wenn sich ein einziger von den φ Fällen, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, in einem Versuche ereignet, r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite, in

x Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-1)\,\ldots\ldots\ldots\,r}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(x-r-t+1)}.y^{r-1}.z^{t-1}.u^{x-r-t+1}.x.\varphi.$$

III. Es kann sich zutragen, daſs einer von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen zweimal, oder in zwei Versuchen sich ereignet; oder, daſs zwei von diesen φ Fällen in zwei Versuchen zum Vorschein kommen. Da nun die Anzahl aller gleich möglichen Arten, einen oder zwei von den φ Fällen in zwei Versuchen hervorzubringen, $=\varphi^2$ ist (§. 2.), und ein jeder von diesen φ^2 Fällen,

{ entweder im 1, u. 2, oder 1, u. 3, ... 1, u. x } ten

— 2, — 3, ... 2, — x

etc.

Versuche sich ereignen kann, welches das Produkt $\frac{x.(x-1)}{1\,.\,2}\varphi^2$ giebt; ferner die Anzahl der Arten, $(r-2)$ mal die erste Begebenheit, und $(t-2)$ mal die zweite, in $(x-2)$ Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-2)\ldots(r+t-3)}{1.2\ldots(x-r-t+2)}.u^{x-r-t+2}.\frac{(r+t-4)\ldots(r-1)}{1.2\ldots(t-2)}.y^{r-2}.z^{t-2}$$

$$\text{oder}\ \frac{(x-2)\,\ldots\ldots\,(r-1)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(x-r-t+2)}.y^{r-2}.z^{t-2}.u^{x-r-t+2}$$

ist, endlich zu einer jeden dieser Arten, einer oder zwei von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in zwei Versuchen auf $\frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}.\varphi^2$ Arten sich ereignen können: so ist die Anzahl der Arten, wenn sich einer oder zwei von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in zwei Versuchen ereignen, r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite, in x Versuchen zu erhalten =

$$\frac{(x-2)\ldots\ldots(r-1)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(x-r-t+2)}.y^{r-2}.z^{t-2}.u^{x-r-t+2}.\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\varphi^2.$$

IV. Es kann ſich zutragen, daſs einer von den φ Fällen in x Verſuchen dreimal, oder zwei, oder drei von den φ Fällen in drei Verſuchen ſich ereignen; wodurch man das Produkt $\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi^3$ bekömmt. Nun iſt die Anzahl der Arten $(r-3)$ mal die erſte Begebenheit, und $(t-3)$ mal die zweite in $(x-3)$ Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-3)\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-3).1.2\ldots(x-r-t+3)}.y^{r-3}.z^{t-3}.u^{x-r-t+3}.$$

Folglich iſt die Anzahl der Arten in dem Falle, wenn ſich einer, oder zwei, oder drei von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in drei Verſuchen ereignen, r mal die erſte Begebenheit, und t mal die zweite, in x Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-3)\ldots\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-3).1.2\ldots(x-r-t+3)}.y^{r-3}.z^{t-3}.u^{x-r-t+3}\times$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi^3.$$

V. Es kann ſich zutragen, daſs einer oder zwei oder drei oder vier von den φ Fällen in vier Verſuchen ſich ereignen; und in dieſem Falle iſt die Anzahl der Arten das verlangte Reſultat zu erhalten, =

$$\frac{(x-4)\ldots\ldots(r-3)}{1.2\ldots(t-4).1.2\ldots(x-r-t+4)}.y^{r-4}.z^{t-4}.u^{x-r-t+4}\times$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\varphi^4.$$ Und ſo weiter.

VI. Es kann ſich endlich zutragen, daſs 1, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, ... oder höchſtens t

(weil $r > t$ ist) von den φ Fällen, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, in t Versuchen sich ereignen, dass also die erste Begebenheit allein sich in $(r-t)$ Versuchen ereignet, und keine von den zwei Begebenheiten in den übrigen $x-(t+(r-t))=x-r$ Versuchen zum Vorschein kommt. Nun ist die Anzahl der Arten $(r-t)$ mal die erste Begebenheit, und $(t-t)$ das ist o mal die zweite, in $(x-t)$ Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-t)\ldots\ldots(r-t+1)}{1.2\ldots\ldots(x-r)}.u^{x-r}.y^{r-t}.z^{0};$$

folglich ist die Anzahl der Arten in dem Falle, wenn sich 1, 2, 3, ... oder t von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in t Versuchen ereignen, r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite, in x Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-t)\ldots\ldots(r-t+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,(x-r)}.y^{r-t}.z^{0}.u^{x-r}.\frac{x\ldots\ldots(x-t+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots t}.\varphi^{t}.$$

VII. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist also die Summe der in Num. I. bis VI. gefundenen Arten das verlangte Resultat zu erhalten. Der Nenner ist $=m^{x}$ (§. 2.). Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\Bigg(\frac{x\,(x-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots.t\,.\,1.2\ldots.(x-r-t)}.\,y^{r}.\,z^{t}.\,u^{x-r-t}\quad+$$

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\ldots r}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(x-r-t+1)}.y^{r-1}.z^{t-1}.u^{x-r-t+1}.\frac{1}{1}\varphi+$$

$$\frac{x\,(x-1)\;\ldots\ldots\;(r-1)}{1.2\ldots.(t-2).1.2\ldots.(x-r-t+2)}.y^{r-2}.z^{t-2}.u^{x-r-t+2}.\frac{1}{1.2}\varphi^{2}+$$

$$\frac{x.(x-1)\ldots\ldots(r-2)}{1.2\ldots.(t-3)1.2\ldots.(x-r-t+3)}.y^{r-3}.z^{t-3}.u^{x-r-t+3}.\frac{1}{1.2.3}\varphi^{3}+$$

$$\frac{x\,(x-1)\ldots\ldots(r-3)}{1.2\ldots.(t-4).1.2\ldots(x-r-t+4)}.y^{r-4}.z^{t-4}.u^{x-r-t+4}.\frac{1}{1.2.3.4}\varphi^{4}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{x(x-1)\ldots\ldots(r-t+2)}{1.1.2\ldots\ldots(x-r-1)}.y^{r-t+1}.z^{1}.u^{x-r-1}.\frac{1}{1.2\ldots(t-1)}.\varphi^{t-1} +$$

$$\frac{x.(x-1)\ldots\ldots(r-t+1)}{1.2\ldots\ldots(x-r)}.y^{r-t}.z^{0}.u^{x-r}.\frac{1}{1.2.3\ldots t}.\varphi^{t}\Big).\frac{1}{m^{x}}$$

W. Z. F.

§. 55.

Beispiel. Das (§. 52.) gegebene Exempel läſst ſich aus dieſer allgemeinen Formel auflöſen, wenn man darinnen $x=8$, $r=4$, $t=2$, $\varphi=1$, $m=36$, $n=5$, $q=6$, und demnach $y=n-\varphi=4$, $z=q-\varphi=5$, $u=m-n-q+\varphi=26$, ſetzt. Man bekömmt alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\Big(\frac{8.7.6.5}{1.2.1.2}.4^{4}.5^{2}.26^{2} +$$

$$\frac{8.7.6.5.4}{1.1.2.3}.4^{3}.5^{1}.26^{3}.\frac{1}{1}.1 +$$

$$\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4}.4^{2}.5^{0}.26^{4}.\frac{1}{1.2}.1^{2}\Big)\frac{1}{36^{8}},$$ wie zuvor a. a. O.

§. 56.*

Aufgabe. *Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs eine jede von den zwei Begebenheiten (§. 54.) wenigſtens einmal in x Verſuchen zum Vorſchein kommt.*

Auflösung. Man ſuche *erſtens* die Anzahl der Fälle, welche keine von den zwei Begebenheiten in x Verſuchen geben, $=u^{x}=(m-n-q+\varphi)^{x}$; *zweitens* die Anzahl der Fälle, welche in x Verſuchen die erſte Begebenheit juſt r mal und die zweite gar nicht geben (§. 54. I.) =

$$(\odot)\ \frac{x\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots(x-r)}.y^{r}.u^{x-r};$$

drittens die Anzahl der Fälle, die in x Versuchen die zweite Begebenheit just t mal und die erste gar nicht geben (ebendaselbst) =

$$\frac{x \ldots\ldots 1}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t)}.z^t.u^{x-t} =$$

$$(☽)\frac{x\ldots\ldots(t+1)}{1.2\ldots(x-t)}.z^t.u^{x-t}.$$

Nun setze man *viertens* in (☉) anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 1, 2, 3, ... bis x, und addire die gefundenen Produkte; so ist die Summe die Anzahl der Fälle, welche in x Versuchen die erste Begebenheit wenigstens einmal, und die zweite gar nicht geben, =

$$x.y.u^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}.y^2.u^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \times$$

$$y^3.u^{x-3} + \ldots + y^x = (u+y)^x - u^x = (m-q)^x - (m-n-q+\phi)^x.$$

Fünftens setze man in (☽) anstatt t alle ganze Zahlen von 1 bis x, so giebt die Summe der herausgekommenen Produkte die Anzahl der Fälle, welche in x Versuchen die zweite Begebenheit wenigstens einmal, und die erste gar nicht geben, =

$$x.zu^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}z^2u^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.z^3.u^{x-3} + \ldots$$

$$\ldots + z^x = (u+z)^x - u^x = (m-n)^x - (m-n-q+\phi)^x.$$

Demnach zeiget $(m-n-q+\phi)^x$

$$+ (m-q)^x - (m-n-q+\phi)^x$$

$$+ (m-n)^x - (m-n-q+\phi)^x$$

$= (m-n)^x + (m-q)^x - (m-n-q+\phi)^x$ die Summe der Fälle, die in x Versuchen entweder keine von den zwei Begebenheiten, oder wenigstens die erste Begebenheit einmal ohne die zweite, oder wenigstens einmal die zweite Begebenheit ohne die erste, geben.

Folglich ist die Anzahl der Fälle, welche in x Versuchen die zwei Begebenheiten, jede wenigstens einmal geben $= m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\phi)^x$. Und demnach die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\phi)^x}{m^x}.$$

§. 57.

Beispiele. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln in vier Würfen wenigstens einmal sechs Augen und einen Pasch zu werfen?

Hier ist (§. 56.) $x=4$; $m=36$; $n=5$; $q=6$; $\phi=1$; also $m-n=31$; $m-q=30$; $m-n-q+\phi=26$. Und demnach die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{36^4 - 31^4 - 30^4 + 26^4}{36^4} =$$

$$\frac{+1679616-923521-810000+456976}{1679616} = \frac{403071}{1679616} = \frac{134357}{559872}.$$

* Man sucht die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln in sechs Würfen wenigstens einmal sieben und acht Augen zu werfen.

Es ist hier $m=36$; $x=6$; $n=6$, $q=5$, $\phi=0$, (Kap. I. §. 4.); also $(m-n)=30$; $(m-q)=31$; $(m-n-q+\phi)=25$;

$$(m-n)^x = 30^6 = 729000000$$
$$(m-q)^x = 31^6 = 887503681$$
$$30^6 + 31^6 = 1616503681$$

$$m^x = 36^6 = 2176782336$$
$$(m-n-q+\phi)^x = 25^6 = 244140625$$
$$36^6 + 25^6 = 2420922961$$
$$\text{subtr. } 1616503681$$
$$+ 804419280$$

Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{804419280}{2176782336} = \frac{50276205}{136048897}.$$

§. 58.*

Anmerkung. Die zu dem zweiten Exempel (§. 57.) gehörige allgemeine Formel:

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q)^x}{m^x}$$

wo der Fall vorkommt, dass $\phi = 0$ ist, das heisst, dass kein Fall die beiden Begebenheiten zugleich giebt; lässt sich auch aus §. 30. durch folgende Rechnung finden:

Man setze am a. O. *für zwei Begebenheiten* (S. §. 54. I.) anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 1 bis $x-t$; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal die erste Begebenheit, und just t mal die zweite, in x Versuchen zu erhalten =

$$\Big(\frac{x \ldots\ldots 2}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t-1)}.(m-n-q)^{x-t-1}.n.q^t \quad +$$

$$\frac{x \ldots\ldots 3}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t-2)}.(m-n-q)^{x-t-2}.n^2.q^t \quad +$$

$$\frac{x \ldots\ldots 4}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t-3)}.(m-n-q)^{x-t-3}.n^3.q^t \quad +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +$$

$$\frac{x \ldots\ldots (x-t+1)}{1.2\ldots\ldots t}.n^{x-t}.q^t\Big).\frac{1}{m^x} =$$

$$\frac{x\ldots(x-t+1)}{1.2\ldots\ldots t}q^t.\Big((n+(m-n-q))^{x-t}-(m-n-q)^{x-t}\Big).\frac{1}{m^x} =$$

$$\frac{x\ldots(x-t+1)}{1.2\ldots t}q^t\Big((m-q)^{x-t}-(m-n-q)^{x-t}\Big).\frac{1}{m^x}.$$

Nun setze man in dieser eben gefundenen Formel anstatt

t al-

t alle ganze Zahlen von 1 bis $x-1$, so wird die Summe der erhaltenen Produkte die gesuchte Wahrscheinlichkeit sein $= [x.q.((m-q)^{x-1} - (m-n-q)^{x-1})$ +

$$\frac{x(x-1)}{1.2}.q^2.((m-q)^{x-2} - (m-n-q)^{x-2}) +$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.q^3.((m-q)^{x-3} - (m-n-q)^{x-3}) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$x.q^{x-1}.((m-q)-(m-n-q))].\frac{1}{m^x} =$$

$$\left[\begin{array}{l} x.(m-q)^{x-1}q + {}^xC(m-q)^{x-2}q^2 + \ldots + x(m-q)^{x-1}q \\ -x.(m-n-q)^{x-1}q - {}^xC(m-n-q)^{x-2}q^2 - \ldots - x(m-n-q)^{x-1}q \end{array}\right] \times$$

$$\frac{1}{m^x} = \left[\begin{array}{l} ((m-q)+q)^x - (m-q)^x - q^x \\ -((m-n-q)+q)^x + (m-n-q)^x + q^x \end{array}\right] \times$$

$$\frac{1}{m^x} = \frac{m^x - (m-q)^x - (m-n)^x + (m-n-q)^x}{m^x}$$

wie gehörig (§. 56.).

§. 59.

I. Wenn man in der allgemeinen Formel (§. 54. VII.) nach und nach für r alle ganze Zahlen von

$$\left[\begin{array}{l} 0 \text{ bis } r \\ r \text{ bis } x-t \end{array}\right]$$

setzt, und die durch solche Substitutionen erhaltenen Resultate zusammen addirt: so erhält man eine neue Formel $\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right]$, welche die Wahrscheinlichkeit anzeigen wird, $\left[\begin{array}{l} \text{höchstens } r \text{ mal} \\ \text{wenigstens } r \text{ mal} \end{array}\right]$ die erste Begebenheit, und just t mal die zweite Begebenheit in x Versuchen zu erhalten.

II. Setzt man in eben dieſer allgemeinen Formel (§. 54. VII.) anſtatt t nach und nach alle ganze Zahlen

$$\left[\begin{matrix}\text{von } 0 \text{ bis } t \\ \text{von } t \text{ bis } x-r\end{matrix}\right]$$

und ſummirt alle vermittelſt dieſer Subſtitutionen gefundenen Produkte; ſo bekömmt man eine neue Formel $\left[\begin{matrix}C \\ D\end{matrix}\right]$, welche die Wahrſcheinlichkeit ſein wird, daſs die erſte Begebenheit juſt r mal, und die zweite Begebenheit $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens } t \text{ mal} \\ \text{wenigſtens } t \text{ mal}\end{matrix}\right]$ ſich ereignet.

III. Wenn man in der allgemeinen Formel A (I.) nach und nach anſtatt t alle ganze Zahlen

$$\left[\begin{matrix}\text{von } 0 \text{ bis } t \\ \text{von } t \text{ bis } x-r\end{matrix}\right]$$

ſchreibt, und alle durch dieſe Subſtitutionen herausgekommenen Reſultate in eine Summe bringt: ſo wird man eine neue Formel $\left[\begin{matrix}E \\ F\end{matrix}\right]$ erhalten, welche die Wahrſcheinlichkeit ſein wird, höchſtens r mal die erſte Begebenheit, und $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens } t \text{ mal} \\ \text{wenigſtens } t \text{ mal}\end{matrix}\right]$ die zweite Begebenheit, in x Verſuchen hervorzubringen.

IV. Setzt man in der allgemeinen Formel B (I.) anſtatt t alle ganze Zahlen von $\left[\begin{matrix}0 \text{ bis } t \\ t \text{ bis } x-r\end{matrix}\right]$ und ſummirt die vermittelſt dieſer Subſtitutionen herausgekommenen Produkte; ſo erhält man eine neue Formel $\left[\begin{matrix}G \\ H\end{matrix}\right]$, welche die Wahrſcheinlichkeit angiebt, daſs die erſte Begebenheit wenigſtens r mal, und die zweite $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens} \\ \text{wenigſtens}\end{matrix}\right]$ t mal geſchiehet.

V. Wenn man in den Formeln C und D (II.) nach und nach anstatt r alle ganze Zahlen $\left\{\begin{matrix} \text{von } 0 \text{ bis } r \\ \text{von } r \text{ bis } x-t \end{matrix}\right\}$ setzt, und alle mittelst dieser Substitutionen herausgekommenen Produkte addirt; so bekömmt man vier neue allgemeine den E, F, G und H gleichgeltende Formeln.

VI. Setzt man in der allgemeinen Formel H, $r = 1$ und $t = 1$: so findet man die Wahrscheinlichkeit, die zwei Begebenheiten, eine jede wenigstens einmal, in x Versuchen hervorzubringen, wie in §. 56:

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\phi)^x}{m^x}.$$

§. 60.

Verlangt man zu wissen, in wie viel Würfen mit zwei gemeinen Spielwürfeln man eine Wette, so rechtmäßsig als es möglich ist, bei gleichen Misen anstellen könne, sechs Augen und einen Pasch zu werfen: so setze man in dem Ausdruk: $\frac{36^x - 31^x - 30^x + 26^x}{36^x}$ (§. 57) für x nach und nach alle ganze Zahlen 2, 3, 4, 5, etc. so lange bis derselbe zu einer Gröſse gelangt, die dem Bruche $\frac{1}{2}$ am nächsten kommt; diejenige Zahl nun, welche für x gesetzt, dieser Bedingung Gnüge thun wird, wird die gesuchte Menge der Würfe sein. So findet man nach angestellter Rechnung, daſs für $x = 8$, obiger Ausdruk sich verwandelt in $\frac{1333128798591}{2821109907456}$ welcher Bruch etwas kleiner als $\frac{1}{2}$ ist: und daſs für $x = 9$ derselbe Ausdruk wird $\frac{55983592650721}{101559956668416}$, welcher Bruch ein wenig gröſser als

$\frac{1}{2}$ ist: hieraus siehet man, daſs es noch nicht vortheilhaft ist, bei gleichen Misen zu wetten, daſs in acht Würfen sechs Augen und ein Pasch fallen werden; daſs es aber unter eben diesen Bedingungen einigermaſsen vortheilhaft sein wird, zu wetten, daſs diese beiden Begebenheiten, jede wenigstens einmal in neun Würfen mit zwei Würfeln geschehen werden.

§. 61.

Wenn die Wahrscheinlichkeiten dreier Begebenheiten, die von ebenderselben gegebenen Handlung, Bewegung oder Zustande abhängen, $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{m}$, $\frac{q'}{m}$ sind; w, y, z die Fälle sind, welche die erste, die zweite, die dritte Begebenheit allein geben; ferner φ, φ', φ'', φ''' diejenigen Fälle sind, welche die erste und die zweite Begebenheit zugleich, die erste und dritte Begebenheit zugleich, die zweite und dritte Begebenheit zugleich, die drei Begebenheiten zugleich geben; und man die Wahrscheinlichkeit zu wissen verlangt, daſs in x Versuchen die erste Begebenheit just r mal, die zweite Begebenheit just t mal, die dritte just t' mal sich ereignen wird: so wird man diese Wahrscheinlichkeit durch eben eine solche Untersuchung finden, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 54) nach §. 30. angestellet worden ist. Allein man wird einen weit zusammengesetztern Ausdruk erhalten, dessen Zähler nicht eine einfache Reihe, auch nicht eine Reihe, deren Glieder wiederum Reihen sind, sondern eine Reihe von Gliedern sein wird, davon ein jedes eine solche Reihe sein wird, von welcher jedes einzelne Glied eine Reihe, deren Glieder einfache Reihen sind, ausmachen wird.

* Nämlich 1) Es kann sich zutragen, daſs keiner von den φ, φ', φ'', φ''' Fällen, welche die erste und zweite, erste und dritte, zweite und dritte Begebenheit,

die drei Begebenheiten zugleich geben, in x Verſuchen ſich ereignet. In dieſem Falle iſt die Zahl der gleich möglichen Arten r mal die erſte Begebenheit

t — — 2te — —

t' — — 3te — — und folglich

$x-r-t-t'$ mal keine von den drei Begebenheiten in x Verſuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{x\,.\,(x-1)\,.\,.\,.\,.\,(r+1)}{1.2..\,|t.1.2...t'.1.2\,.\,(x-r-t-t')}\,.\,u^{x-r-t-t'}.w^{r}.y^{t}.z^{t'}.$$

2) Es kann ſich zutragen, daſs nur ein Fall von den φ Fällen, welche die erſte und zweite Begebenheit zugleich geben, in einem Verſuche ſich ereignet. Alsdann iſt die Zahl der Arten r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Verſuchen zu erhalten (§ 30.) =

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r}{1.2\,.\,.\,.\,.\,(t-1).1.2\,.\,.\,.\,.\,t'.1.2\,.\,.\,.\,.\,(x-r-t-t'+1)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+1}.w^{r-1}.y^{t-1}.z^{t'}.\frac{1}{1}.\varphi.$$

3) Es kann ſich zutragen, daſs einer oder zwei von den φ Fällen, welche die erſte und zweite Begebenheit zugleich geben, in zwei Verſuchen ſich ereignen; und in dieſem Fall iſt die Zahl der Arten r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte in x Verſuchen zu erhalten =

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(r-1)}{1.2\,.\,.\,.\,.\,(t-2).1.2\,.\,.\,.\,.\,t'.1.2\,.\,.\,.\,.\,(x-r-t-t'+2)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+2}.w^{r-2}.y^{t-2}.z^{t'}.\frac{1}{1.2}\varphi^{2}.$$ Und ſo weiter.

4) Es kann ſich endlich zutragen, daſs 1, 2, 3,.... oder t von den φ Fällen, welche die erſte und zweite Begebenheit zugleich geben, in t Verſuchen ſich ereignen; dann iſt die Anzahl der Arten r mal die erſte Be-

gebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\ldots\,(r-t+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,t'\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,(x-r-t')}\times$$

$$u^{x-r-t'}\,.\,w^{r-t}\,.\,y^{0}\,.\,z^{t'}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\ldots t}\,.\,\varphi^{t}.$$

5) Folglich ist die Anzahl der Arten, wenn keiner von den φ', φ'', φ''' Fällen, welche die erste und dritte, zweite und dritte, die drei Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen sich ereignet, r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten (aus Num. 1, 2, 3, 4) =

$$\frac{x\,.\,(x-1)\,(x-2)\ldots\,(r+1)}{1\,.\,2\ldots t\,.\,1\,.\,2\ldots t'\,.\,1\,.\,2\ldots(x-r-t-t')}\,.\,w^{r}\,.\,y^{t}\,.\,z^{t'}\,.\,u^{x-r-t-t'}\,.\,1$$

$$+\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\ldots\,r}{1\,.\,2\ldots(t-1)\,.\,1\,.\,2\ldots t'\,.\,1\,.\,2\ldots(x-r-t-t'+1)}\times$$

$$w^{r-1}\,.\,y^{t-1}\,.\,z^{t'}\,.\,u^{x-r-t-t'+1}\,.\,\frac{1}{1}\,\varphi$$

$$+\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\ldots\,(r-1)}{1\,.\,2\ldots(t-2)\,.\,1\,.\,2\ldots t'\,.\,1\,.\,2\ldots(x-r-t-t'+2)}\times$$

$$w^{r-2}\,.\,y^{t-2}\,.\,z^{t'}\,.\,u^{x-r-t-t'+2}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2}\,\varphi^{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\ldots\,(r-t+1)}{1\,.\,2\ldots t'\,.\,1\,.\,2\,\ldots\ldots\,(x-r-t')}\times$$

$$w^{r-t}\,.\,z^{t'}\,.\,u^{x-r-t'}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\ldots\ldots t}\,.\,\varphi^{t};$$

welche Reihe S heissen mag.

6) Es kann sich zutragen, dass keiner von den φ', φ'', φ''' Fällen in x Versuchen geschiehet; und in dem Falle ist die Zahl der Arten das verlangte Resultat zu erhalten $= S\,.\,1$.

7) Es kann ſich zutragen, daſs einer von den φ' Fällen, welche die erſte und dritte Begebenheit zugleich geben, in einem Verſuche ſich ereignet. Alsdann iſt die Anzahl der Fälle, r mal die Iſte Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Verſuchen zu erhalten =

$$\Big(\frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots r}{1.2\ldots t.1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t-t'+1)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+1}.w^{r-1}.y^{t}.z^{t'-1}.1$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(r-1)}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t-t'+2)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+2}.w^{r-2}.y^{t-1}.z^{t'-1}.\frac{1}{1}\varphi$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t-t'+3)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+3}.w^{r-3}.y^{t-2}.z^{t'-1}.\frac{1}{1.2}\varphi^{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(r-t)}{1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t'+1)}\times$$

$$u^{x-r-t'+1}.w^{r-t-1}.y^{0}.z^{t'-1}.\frac{1}{1.2\ldots t}.\varphi^{t}\Big).\frac{x}{1}\varphi'.$$

Nämlich wenn ſich nur einer von den φ' Fällen (und alſo keiner von den φ'', φ''' Fällen) ereignet; ſo können ſich dazu

entweder 0,
oder ein Fall von den φ Fällen in einem Verſuche
1 oder 2 Fälle — — — — 2 Verſuchen
1, 2, 3 — — — — — 3 — —
.
1, 2, 3, ... t — — — — t — —

ereignen. Ereignet ſich keiner von den φ Fällen, welche die erſte und zweite Begebenheit zugleich geben; ſo

findet man aus Num. 1. die Anzahl der Arten $(r-1)$ mal die erste, t mal die zweite, und $(t'-1)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, wenn man

statt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$

Denn wenn sich nur einer von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche ereignet; so kann sich keiner von den φ, φ', φ'', φ''' Fällen in $(x-1)$ Versuchen ereignen, und also wird in dem Falle die Anzahl der Arten

$$\left\{\begin{matrix} (r-1) & & \text{1ste} \\ t & \text{mal die} & \text{2te} \\ (t'-1) & & \text{3te} \end{matrix}\right\} \text{Begebenheit}$$

in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, durch die nur angezeigten Substitutionen gefunden.

Ereignet sich einer von den φ Fällen, welche die erste und zweite Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche, so findet man aus Num. 2. die Anzahl der Arten $(r-1)$ mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und $(t'-1)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, wenn man

anstatt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$

Hiedurch erhält man das zweite Glied vorhergehender Reihe.

Das dritte Glied eben dieser Reihe findet man aus Num. 3. wenn man

statt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$

Und so weiter. Endlich findet man das letzte Glied dieser Reihe aus Num. 4. wenn man

statt der dortigen	x	r	t	t'
schreibt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$.

8) Es kann sich zutragen, daſs einer oder zwei von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in zwei Versuchen sich ereignen. Alsdann können sich dazu entweder 0; oder 1; oder 1, 2;

oder 1, 2, 3; oder 1, 2, 3, ... t von den φ Fällen, welche die erſte und zweite Begebenheit zugleich geben, in den übrigen $(x-2)$ Verſuchen ereignen. Ereignet ſich keiner von den φ Fällen, ſo findet man aus Num. 1. die Anzahl der Fälle $(r-2)$ mal die erſte, t mal die zweite, und $(t-2)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-2)$ Verſuchen zu erhalten, wenn man

anſtatt	x	r	t	t'
ſchreibt	$x-2$	$r-2$	t	$t'-2$

$$= \frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t-t'+2)} \times$$
$$u^{x-r-t-t'+2}.w^{r-2}.y^{t}.z^{t'-2}.$$

Ereignet ſich einer von den φ Fällen, ſo findet man aus Num. 2. die Anzahl der Fälle $(r-2)$ mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und $(t'-2)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-2)$ Verſuchen zu erhalten, wenn man

anſtatt	x	r	t	t'
ſetzt	$x-2$	$r-2$	t	$t'-2$

$$= \frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-1)1.2\ldots(t'-2)1.2\ldots(x-r-t-t'+3)} \times$$
$$u^{x-r-t-t'+3}.w^{r-3}.y^{t-1}.z^{t-2}.\frac{1}{1}\varphi$$

Das folgende Glied bekömmt man aus Num. 3, wenn man für x, r, t, t' die eben genannten Werthe ſetzt =

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-3)}{1.2\ldots(t-2)1.2\ldots(t'-2)1.2\ldots(x-r-t-t'+4)} \times$$
$$u^{x-r-t-t'+4}.w^{r-4}.y^{t-2}.z^{t'-2}.\frac{1}{1.2}.\varphi^2$$

Und ſo weiter. Endlich hat man das letzte Glied (aus Num. 4.) =

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-t-1)}{1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t'+2} . w^{r-t-2} . y^{0} . z^{t'-2} . \frac{1}{1 . 2 \ldots . t} . \varphi^{t}$$

Wenn sich also einer oder zwei von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in zwei Versuchen ereignen; so ist die Anzahl der Arten r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte in x Versuchen zu erhalten =

$$\Big(\frac{(x-2)(x-3) \ldots\ldots (r-1)}{1.2 \ldots . t . 1 . 2 \ldots . (t'-2) . 1 . 2 \ldots . (x-r-t-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+2} . w^{r-2} . y^{t} . z^{t'-2} . 1 +$$

$$\frac{(x-2)(x-3) \ldots . (r-2)}{1 . 2 \ldots . (t-1) . 1 . 2 \ldots . (t'-2) . 1 . 2 \ldots . (x-r-t-t'+3)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+3} . w^{r-3} . y^{t-1} . z^{t'-2} . \frac{1}{1} \varphi +$$

$$\frac{(x-2)(x-3) \ldots\ldots (r-3)}{1 . 2 \ldots . (t-2) . 1 . 2 \ldots . (t'-2) . 1 . 2 \ldots . (x-r-t-t'+4)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+4} . w^{r-4} . y^{t-2} . z^{t'-2} . \frac{1}{1 . 2} \varphi^{2} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(x-2)(x-3) \ldots\ldots (r-t-1)}{1 . 2 \ldots . (t'-2) . 1 . 2 \ldots . (x-r-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t'+2} . w^{r-t-2} . y^{0} . z^{t'-2} . \frac{1}{1 . 2 \ldots t} \varphi^{t}\Big) . \frac{x(x-1)}{1 . 2} \varphi'^{2} .$$

9) Fährt man auf diese Art zu schliessen fort; so bekömmt man folgende endliche Reihe, wo statt der Faktorenreihen Sternchen gesetzt worden sind:

$$S . 1 + {*} . \frac{x}{1} \varphi' + {*} . \frac{x(x-1)}{1 . 2} \varphi'^{2} + {*} . \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3} \varphi'^{3} + \ldots$$

$$\ldots + {*} . \frac{x(x-1) \ldots\ldots (x-t'+1)}{1 . 2 \ldots\ldots t'} \varphi'^{t'} ;$$ welche

S' heissen mag.

Die letzte, dem Faktor $\varphi'^{t'}$ zugehörige Reihe findet man aus Num. 1, 2, 3, 4, wenn man

anſtatt x	r	t	t'
$x-t'$	$r-t'$	t	$t'-t'$ ſetzt.

10) Es kann ſich zutragen, daſs keiner von den φ'', φ''' Fällen in x Verſuchen geſchiehet; alsdann iſt die Zahl der Arten, r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Verſuchen zu erhalten $= S'$. 1.

11) Es kann ſich zutragen, daſs einer von den φ'' Fällen, welche die zweite und dritte Begebenheit zugleich geben, in einem Verſuche ſich ereignet; dann können ſich zugleich entweder 0,

oder 1 Fall von den φ' Fällen in einem Verſuche,
— 1 oder 2 Fälle — — — 2 Verſuchen,
— 1 — 2 oder 3 Fälle — — 3 — —
. .
— 1, 2, 3, ... t' — — — t' — —

ereignen. Ereignet ſich keiner von den φ' Fällen, welche die erſte und dritte Begebenheit zugleich geben, ſo findet man aus Num. 6. die Anzahl der Fälle r mal die erſte Begebenheit, $(t-1)$ mal die zweite, $(t'-1)$ mal die dritte in $(x-1)$ Verſuchen zu erhalten, wenn man

anſtatt x	r	t	t'
ſetzt $x-1$	r	$t-1$	$t'-1$

Ereignet ſich ein Fall von den φ' Fällen in einem Verſuche, ſo findet man die Anzahl der Fälle r mal die erſte Begebenheit, $(t-1)$ mal die zweite, und $(t'-1)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-1)$ Verſuchen zu erhalten, wenn man die vorhin genannten Werthe für x, r, t, t' in 7) ſchreibt. Und ſo weiter. Die Summe dieſer Reihen wird in $\frac{x}{1}\varphi''$ multiplicirt.

12) Setzt man die Betrachtung auf dieſe Art fort; ſo kommt man zuletzt auf folgende endliche Reihe:

$$S'.1 + * \frac{x}{1}\varphi'' + * \frac{x(x-1)}{1 . 2}\varphi''^{2} + * \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3}\varphi''^{3} + \dots$$

$$\dots\dots + * \frac{x(x-1)\dots\dots(x-t'+1)}{1 . 2 \dots\dots t'}\varphi''^{t'} = S''.$$

13) Es kann ſich endlich zutragen, daſs keiner von den φ''' Fällen, welche die drei Begebenheiten zugleich geben, ſich ereignet; und alsdann iſt die Anzahl der Arten r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Verſuchen zu erhalten, die in voriger Nummer 12. gefundene Reihe $= S''.1$.

14) Es kann ſich zutragen, daſs einer von den φ''' Fällen, welche die drei Begebenheiten zugleich geben, in einem Verſuche ſich ereignet, und dazu keiner von den φ'' Fällen; ſo findet man die Anzahl der Arten, r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte in x Verſuchen zu erhalten, wenn man in 10, $r = r-1$, $t = t-1$, $t' = t'-1$, $x = x-1$ ſetzt, und die auf dieſe Art veränderte Reihe S' in $\frac{x}{1}\varphi'''$ multiplicirt.

Auf ähnliche Art werden die folgenden Glieder der Reihe S'': $* \frac{x}{1}\varphi''$; $* \frac{x(x-1)}{1 . 2}\varphi''^{2}$; u. ſ. f. umgeändert, und die Summe aller wird in $\frac{x}{1}\varphi'''$ multiplicirt.

15) Bei der nächſtfolgenden Unterſuchung wird die gehörig veränderte Reihe S'' in $\frac{x(x-1)}{1 . 2} . \varphi'''^{2}$ gevielfältigt.

16) Bis man auf folgende Reihe kommt: $S''' =$

$$S''.1 + * \frac{x}{1}\varphi''' + * \frac{x.(x-1)}{1 . 2}\varphi'''^{2} + * \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3}\varphi'''^{3} + \dots$$

$$\ldots + * \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots t'} \cdot \varphi'''^{t'};$$

welche der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein wird, deren Nenner $= m^x$ ist.

17) Die ganze Untersuchung beruhet also auf folgenden vier Punkten:

Anfänglich erhält man eine Reihe S (Num. 5.) von Gliedern, davon das erste in 1, das zweite in $\frac{x}{1}\varphi$, das dritte in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi^2$, das vierte in $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi^3$, und so weiter, endlich das letzte in $\frac{x(x-1)\ldots(x-t+1)}{1 \cdot 2 \ldots t}\varphi^t$ multiplicirt ist. (Num. 1 : 5).

Diese Reihe (S) ist das erste Glied einer andern Reihe S' (Num 9) davon jedes folgende Glied eine ähnliche Reihe wie S ist, und das erste Glied in 1, das zweite in $\frac{x}{1}\varphi'$, das dritte in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi'^2$, das vierte in $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi'^3$, u. s. w. das letzte in $\frac{x\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \ldots t'}\varphi'^{t'}$ multiplicirt ist. (Num. 6 : 9).

Diese letzte Reihe (S') ist wiederum das erste Glied von einer neuen Reihe S'' (Num. 12.) davon jedes folgende Glied eine ähnliche Reihe wie S' ist, und das erste in 1, das zweite in $\frac{x}{1}\varphi''$, das dritte in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi''^2$, u. s. f. das letzte in $\frac{x\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \ldots t'}\varphi''^{t'}$ gevielfältigt ist. (Num. 10 : 12.).

Endlich ist die solchergestalt erhaltene Reihe (S'') das erste Glied einer Reihe S''', (Num. 16.) deren jedes folgende Glied eine ähnliche Reihe, wie S'' ist, und nach und nach in $\frac{x}{1}\varphi''',\ \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\varphi'''^{2},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-t'+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,t'}\,.\,\varphi'''^{t'}$ multiplicirt ist; welches die Reihe in Num. 16 giebt, die der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist. (Num. 13=16.)

§. 62.

Uebrigens kann man, vermittelst der (in §. 61. Num. 16.) gefundenen Wahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeiten finden, dass, wenn die erste Begebenheit just, oder höchstens oder wenigstens r mal, und die zweite just, höchstens oder wenigstens t mal sich ereignet; die dritte Begebenheit just oder höchstens oder wenigstens t' mal sich ereignen wird; nach der in §. 59. angezeigten Methode.

§. 63.

Man könnte diese Untersuchungen noch weiter ausdehnen, und die Wahrscheinlichkeiten suchen, in x Versuchen just, oder wenigstens, oder höchstens r mal eine Begebenheit zu erhalten, deren Wahrscheinlichkeit in einem Versuche $\frac{n}{m}$ ist, t mal eine Begebenheit zu erhalten, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{q}{m}$ ist, t' mal eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{q'}{m}$, t'' mal eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{q''}{m}$, t''' mal eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{q'''}{m}$ ist, u. s. f. Aber

-diese Rechnungen würden sehr weit führen, und überdiemasen weitläuftig sein. Es ist genug, dass wir unsern Lesern die Bahn dazu gebrochen, und sie in den Stand gesetzt haben, dergleichen Rechnungen, wenn sie nöthig sind, selbst anzustellen: ohne sie hier unnützerweise durch trokne und zu verwikelte Speculationen zu ermüden.

§. 64.

Wenn man für eine jede von den bestimmten Begebenheiten den Versuch angiebt, in welchem sie sich ereignen soll: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die bestimmten Begebenheiten, eine jede von derselben, in dem ihr angewiesenen Versuche geschehen wird, aus den Wahrscheinlichkeiten der bestimmten Begebenheiten zusammengesetzt, oder das Produkt dieser Wahrscheinlichkeiten. (Kap. II. §. 4, 5, 6, 7).

Z. E Wenn die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $\left\{\begin{array}{l} \frac{n}{m} \\ \frac{p}{m} \\ \frac{q}{m} \end{array}\right.$ ist, im $\left.\begin{array}{l} \text{1sten} \\ \text{2ten} \\ \text{3ten} \end{array}\right\}$ Versuche sich ereignen soll: so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammengeschehens dieser drei Begebenheiten auf die erwähnte Art, $\frac{npq}{m^3}$.

§. 65.*

Beispiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in sechs Würfen zuerst ein As, dann eine 2, hierauf eine 3, alsdann eine 4, dann eine 5, und zuletzt 6 zu werfen?

Weil hier alle sechs verschiedene Seiten des Würfels in einer gewissen Ordnung geworfen werden sollen: so giebt es für jeden Wurf nur einen einzigen Fall; da nun die Anzahl aller Fälle in einem Versuche $= 6$ ist; so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, $=$

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{46656}.$$

S. Kap. II. §. 8.

§. 66.

Sollen sich nur zwei allein von den drei bestimmten Begebenheiten in den ihnen angewiesenen Versuchen ereignen; so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit $= \frac{np(m-q)+nq(m-p)+pq(m-n)}{m^3}$. *)

§. 67.

*) Denn es ereignet sich entweder diejenige Begebenheit,

deren Wahrscheinlichkeit $= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{m}, & \text{1sten} \\ \frac{p}{m} \text{ ist, im} & \text{2ten} \\ 1-\frac{q}{m}, & \text{3ten} \end{array} \right\}$ Versuche;

oder diejenige Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{m}, & \text{1sten} \\ 1-\frac{p}{m} \text{ ist, im} & \text{2ten} \\ \frac{q}{m}, & \text{3ten} \end{array} \right\}$ Versuche;

oder

§. 67.*

Beispiel. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Begebenheit (§. 65.) nur in zwei Würfen eintreffen wird?

Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt =

$$(1.1.5^4+1.1.5^4+1.1.5^4+1.1.5^4+1.1.5^4$$
$$+1.1.5^4+1.1.5^4+1.1.5^4+1.1.5^4$$
$$+1.1.5^4+1.1.5^4+1.1.5^4$$
$$+1.1.5^4+1.1.5^4$$
$$+1.1.5^4):6^6$$

$$=\frac{5^5+5^4.4+5^4.3+5^4.2+5^4}{6^6}=\frac{9375}{46656}.$$

oder die, deren Wahrſcheinlichkeit = $\left\{\begin{matrix} 1-\frac{n}{m}, & \text{1ſten} \\ \frac{p}{m}\ \text{iſt, im} & \text{2ten} \\ \frac{q}{m} & \text{3ten} \end{matrix}\right\}$ Verſuche.

Daſs alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit ſein wird:

$$\frac{np}{m^2}\left(1-\frac{q}{m}\right)+\frac{nq}{m^2}\left(1-\frac{p}{m}\right)+\frac{pq}{m^2}.\left(1-\frac{n}{m}\right)$$

oder $[np(m-q)+nq(m-p)+pq(m-n)]:m^3$.
W. Z. E.

Kommt noch eine vierte Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{r}{m}$ iſt, hinzu; ſo wird bei vier Begebenheiten eben dieſe Wahrſcheinlichkeit ſein:

$$(np(m-q)(m-r)+nq(m-p)(m-r)+nr(m-p)(m-q)$$
$$+pq(m-n)(m-r)+pr(m-n)(m-q)$$
$$+qr(m-n)(m-p)):m^4$$

Und ſo weiter.

Anm. des Ueberſ.

§. 68.

Wenn ſich nur eine einzige von drei beſtimmten Begebenheiten in demjenigen Verſuche ereignen ſoll, der ihr angewieſen worden iſt; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{n}{m}.\left(1-\frac{p}{m}\right)\left(1-\frac{q}{m}\right)+\frac{p}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{q}{m}\right)+\frac{q}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{p}{m}\right)=$$

$$\frac{n(m-p)(m-q)+p(m-n)(m-q)+q(m-n)(m-p)}{m^3}.$$

Wenn ſich keine von drei gegebenen Begebenheiten in dem ihr angewieſenen Verſuche ereignen ſoll; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{(m-n)(m-p)(m-q)}{m^3}.$$

Sollen ſich wenigſtens zwei von drei beſtimmten Begebenheiten in den Verſuchen ereignen, die ihnen angewieſen worden ſind: ſo iſt dieſe Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{npq+np(m-q)+nq(m-p)+pq(m-n)}{m^3} \text{ oder}$$

$$\frac{mnp+(n(m-p)+(m-n)p)q}{m^3}.$$

Wenn höchſtens eine von drei Begebenheiten in dem ihr angewieſenen Verſuche geſchehen ſoll: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{(m-n)(m-p)(m-q)}{m^3}+$$

$$\frac{n(m-p)(m-q)+p(m-n)(m-q)+q(m-n)(m-p)}{m^3}=$$

$$\frac{m(m-p)(m-q)+(m-n)(p(m-q)+q(m-p))}{m^3}.$$

Verlangt man, dafs in x Verfuchen, wenigftens zwei von drei beftimmten Begebenheiten in den angegebenen Verfuchen gefchehen follen, und dafs eine vierte Begebenheit, deren Wahrfcheinlichkeit $\frac{r}{m}$ ift, wenigftens einmal in den $(x-3)$ übrigen Verfuchen fich ereignet; fo wird die Wahrfcheinlichkeit diefer Begebenheit fein: $\frac{mnp+q(n(m-p)+p(m-n))}{m^3} \cdot \left[1-\left(1-\frac{r}{m}\right)^{x-3}\right]$.

Und fo ferner fort.

§. 69.

Wenn man, anftatt die Handlung oder Bewegung, wovon die Begebenheiten abhängen, eine Anzahl von malen x hinter einander zu wiederholen; x ähnliche Handlungen oder Bewegungen zu gleicher Zeit hätte, oder fie auf einmal hervorbrächte, fo würde offenbar die gefuchte Wahrfcheinlichkeit ebendiefelbe fein. *)

Wenn alfo die Wahrfcheinlichkeit einer gegebenen Begebenheit $\frac{n}{m}$ ift, und man x Handlungen oder Bewegungen zu gleicher Zeit hat, oder folche auf einmal hervorbringt, die derjenigen, wovon diefe Begebenheit abhängt, gleich find; fo ift die Wahrfcheinlichkeit diefe Begebenheit juft r mal zu erhalten,

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{1\cdot 2\ldots r}\cdot\frac{n^r}{m^x}\cdot(m-n)^{x-r} \quad (\text{§. } 32.);$$

*) Ift z. B. jemanden mit zehn Würfeln ein Wurf erlaubt; fo ift es völlig gleichgültig, ob er diefe zehn Würfel auf einmal, oder nach und nach einen nach dem andern auf den Tifch wirft; und wenn er es auf die letztere Art verrichtet, fo ift es wiederum einerlei, ob er es mit zehn verfchiedenen Würfeln, oder mit einem und ebendemfelben Würfel vornimmt.

Anm. des Uebers.

wenigstens r mal,

$$1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^x.\left(1+x.\frac{n}{m-n}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{1\,.\,2\ldots(r-1)}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^{r-1}\right)\ (\S.\ 45.);$$

höchstens r mal,

$$\left(1-\frac{n}{m}\right)^x.\left(1+x.\frac{n}{m-n}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots r}\left(\frac{n}{m-n}\right)^r\right)\ (\S.\ 41.);$$

wenigstens einmal, $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^x$ (§. 5.);

höchstens einmal, $\left(1-\frac{n}{m}\right)^x.\left(1+x.\frac{n}{m-n}\right)$ (§. 42.);

just einmal, $\frac{x}{1}.\frac{(m-n)^{x-1}.n}{m^x}$ (§. 34.).

Sind zwei Begebenheiten gegeben, davon die Wahrscheinlichkeiten $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{m}$ sind, und wo die Anzahl der Fälle, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, φ ist; und hat man zu gleicher Zeit, oder bringt auf einmal eine Anzahl x von Handlungen oder Bewegungen hervor, die derjenigen, wovon diese zwei Begebenheiten abhängen, gleich sind: so ist die Wahrscheinlichkeit, diese zwei Begebenheiten, die erste just r mal, und die zweite just t mal zu erhalten, der (§. 54. VII.) gefundene allgemeine Ausdruk. Die Wahrscheinlichkeiten diese zwei Begebenheiten zu erhalten, die erste $\left[\begin{array}{l}\text{höchstens}\\ \text{wenigstens}\end{array}\right]$ r mal, und die zweite just t mal, werden die Formeln A und B sein (§. 59. I.); die zweite

$\left[\begin{matrix}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{matrix}\right]$ t mal, und die erſte juſt r mal, werden die Formeln C und D ſein (ebendaſelbſt II.); die erſte höchſtens r mal, und die zweite $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{matrix}\right]$ t mal, werden die Formeln E und F ſein; die erſte wenigſtens r mal und die zweite $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{matrix}\right]$ t mal, werden die Formeln G und H anzeigen.

Die Wahrſcheinlichkeit, eine jede wenigſtens einmal zu erhalten, iſt die Formel

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\varphi)^x}{m^x} \quad (\S.\ 56.).$$

Sind ſo viel Begebenheiten gegeben, als man will, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{n}{m}, \frac{q}{m}, \frac{q'}{m}, \frac{q''}{m}, \ldots\ldots,$ und iſt o die Anzahl der Fälle, welche mehrere von dieſen Begebenheiten zugleich geben: und bringet man zu gleicher Zeit eine Anzahl x von Handlungen oder Bewegungen hervor, die derjenigen gleich ſind, von welcher alle dieſe Begebenheiten abhängen: ſo wird die Wahrſcheinlichkeit, juſt r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, t' mal die dritte, t'' mal die vierte, ... zu erhalten, die (§. 28. IV; §. 30.) gefundene allgemeine Formel ſein. So iſt die Wahrſcheinlichkeit mit zwanzig Würfeln zugleich dreimal ein Aſs, fünfmal eine zwei, zweimal eine drei, viermal eine vier, fünfmal eine fünfe und einmal eine ſechſe zu werfen $\frac{56581525}{352638738432}$ (§. 29.)

Wenn acht Perſonen zu gleicher Zeit jede zwei Würfel auf einen Tiſch werfen, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs zwei von dieſen Perſonen, fünf und vier

Augen, daſs zwei 3 und 2 Augen werfen werden, daſs eine allein ſechs und ſechs, und eine fünf und fünf werfen wird, $\frac{875}{34012224}$ (§. 31.)

Kapitel VIII.

Berechnung der Wahrſcheinlichkeiten mittelſt Analyſe der vorgelegten Fragen.

§. 1.

Die unendliche Mannichfaltigkeit der Fragen, welche die Wahrſcheinlichkeiten betreffend vorgelegt werden können, verſtattet nicht eine allgemeine Regel anzugeben, vermittelſt welcher alle Wahrſcheinlichkeiten, die man zu wiſſen verlangen könnte, ſich genau berechnen lieſsen. Demohngeachtet haben wir in den vorhergehenden Kapiteln Sätze von der gröſsten Allgemeinheit vorgetragen, mittelſt welcher man leicht eine unendliche Menge von Fragen dieſer Art, und inſonderheit den meiſten Theil derer, welche auf die gewöhnlichen Glüksſpiele ſich beziehen, aufzulöſen im Stande ſein wird. Auch haben wir uns dieſe Sätze durch Beiſpiele, die ihre Anwendung zeigen, aufzuklären bemüht. Gegenwärtiges Kapitel nebſt den beiden darauf folgenden iſt dazu beſtimmt, die Leſer mit dem Gebrauche dieſer Sätze je mehr und mehr vertraut zu machen, und durch die Auflöſung einzelner Fragen zu zeigen, wie man die Wahrſcheinlichkeiten durch Hülfe der Analyſe und der Geometrie, wenn anders dieſe Fragen die Anwendung derſelben erlauben, genau berechnen kann.

§. 2.

Frage 1. *Ich ſpiele Whiſt, und gebe. Wie groſs wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs meine Handkarte aus*

dreizehn Karten von der Trumpffarbe bestehen wird; oder welches einerlei ist, daſs ich allein alle Trümpfe in die Hand bekommen werde?

Auflösung. 1. Um den Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu erhalten: ist zu bemerken, daſs, angenommen daſs ich die dreizehn Trümpfe in der Hand habe, die 39 alsdann noch übrigen Kartenblätter unter die drei andern Spieler auf $\frac{39 \ldots 14}{(1.2 \ldots 13)^2}$ Arten ausgetheilt werden können (Kap. 5. §. 13); folglich ist diese Zahl der gesuchte Zähler.

2. Um den Nenner zu bekommen, ist zu merken, daſs die Anzahl der Arten, auf welche die 52 Blätter des ganzen Spiels zu vier gleichen Theilen unter die vier spielenden Personen ausgetheilt werden können, ist $\frac{52 \ldots 14}{(1.2 \ldots 14)^3}$ (Kap. V. §. 12, 2. und §. 13.); welche den Nenner giebt. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{39 \ldots 14}{(1.2 \ldots 13)^2} : \frac{52 \ldots 14}{(1.2 \ldots 13)^3} = \frac{1.2 \ldots 13}{52 \ldots 40} = \frac{1}{635013559600}.$$

§. 3.

Frage 2. *Ich und Peter wollen Piket mit einander spielen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daſs ich die vier Tertien-Major gleich nach dem Kartengeben ohne zu kaufen beisammen haben werde?*

Auflösung. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit wird folgendergestalt gefunden: Gesetzt, daſs ich die vier Tertien-Major in der That erhalte, so können dann die zwanzig übrig gebliebenen Karten zwischen Petern und der Kaufkarte ausgetheilt, das ist, in zwei Theile, den einen von zwölf und den andern von acht Blättern, zerlegt werden, auf $\frac{20 \ldots 13}{1.2 \ldots 8}$ Arten (Kap. V.

§. 5.). Diese Zahl ist also der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Der Nenner ist die Anzahl der Arten, auf welche 32 Karten in drei Theile, zwei zu zwölf und einen zu acht Blättern getheilt werden können, das ist $\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}$ (Kap. V. §.12, 1.). Demnach ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}:\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}=\frac{1.2\ldots12}{32\ldots21}=\frac{1}{225792840}.$$

§. 4.

Frage 3. *Peter, mit dem ich Piket spielen will, erhalte von mir die vier Tertien-Major, und ich nehme für mich, ohne zu wählen, zwölf Blätter aus den zwanzig übrig gebliebenen. Man fragt, wie groſs die Wahrscheinlichkeit ist, daſs ich, ehe ich kaufe, einen Neunziger machen werde?*

Auflösung. 1. Ich kann nicht anders als mittelst zwei schlechter Quinten einen Neunziger machen. Nun befinden sich unter den 20 Karten, die nach Hinwegnehmung der Karten des Peter übrig geblieben sind, vier schlechte Quinten, davon ich zwei auf $\frac{4\cdot3}{1\cdot2}$ oder sechs verschiedene Arten erhalten kann, weil es $\frac{4\ldots(4-2+1)}{1\cdot2}$, verschiedene Arten giebt, 2 aus vier zu nehmen (Kap. V. §. 5.). Aber auf was für eine Art ich die zwei nöthigen Quinten auch erhalten mag, so sind noch zehn Blätter übrig, woraus ich, um meine Karte zu ergänzen, noch zwei haben muſs. Da nun zwei aus zehn auf $\frac{10\ldots(10-2+1)}{1\cdot2}$ oder 45 Arten genommen werden können; so ist 6.45 der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

2. Der Nenner ist die Anzahl der Arten, auf welche man zwölf aus zwanzig nehmen kann, das ist $\frac{20 \ldots 9}{1.2 \ldots 12}$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$6 \cdot 45 : \frac{20 \ldots 9}{1.2 \ldots 12} = \frac{9}{4199}.$$

§. 5.

FRAGE 4. *Ich spiele mit Petern das Trumpfspiel; wir haben ein jeder unsere Karte in der Hand, und ein Koeur ist Trumpf; ich habe zwei Koeur unter meiner Karte. Wie groſs wird die Wahrscheinlichkeit für mich sein, daſs Peter wenigstens drei Koeur in seiner Karte hat?*

AUFLÖSUNG. 1. Den Zähler der verlangten Wahrscheinlichkeit zu bekommen, bemerke man, daſs acht Koeur überhaupt in der Spielkarte befindlich sind, daſs ich zwei davon in meiner Handkarte habe, und eins Trumpf ist; daher nur noch fünf Koeur für Petern übrig sind. Um also zu erfahren, auf wie viel mögliche Arten Peter in seiner Karte wenigstens drei von diesen fünf Koeur haben kann, läſst sich die vorgelegte Frage folgendergestalt ausdrüken: Aus 26 verschiedenen Karten sondere man fünf aus, und ziehe auch fünf heraus; auf wie viel Arten ist es möglich, daſs unter den fünf gezogenen sich wenigstens drei von den fünf ausgesonderten befinden werden? Um diese Frage aufzulösen, setze man in dem Zähler der allgemeinen Formel des Kap. V. §. 32. (das ist, in der Reihe allein) $m = 26$, $n = 5$, $r = 3$; so verwandelt sie sich in

$$1 + 5 . 21 + \frac{5.4}{1.2} . \frac{21.20}{1.2} = 2206,$$

welches der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein wird.

2. Den Nenner zu erhalten, bemerke ich, daſs Peter seine Spielkarten nicht anders, als aus den 26 Blät-

tern, die mir unbekannt ſind, erhalten kann; denn es können weder die fünf Blätter meiner Handkarte, noch das gewählte Trumpfblatt darunter ſein. Die Frage wird alſo auf folgende gebracht, zu beſtimmen, auf wie viel Arten ſich fünf Karten aus 26 nehmen laſſen; dieſe Zahl der Arten iſt

$$\frac{26\ldots\ldots(26-5+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;.\;5} = 65780,$$

welches der geſuchte Nenner ſein wird. Alſo iſt die verlangte Wahrſcheinlichkeit $\frac{2206}{65780} = \frac{1103}{32890}$.

§. 6.

Frage 5. *Ich, Peter, Jakob und Johann ſpielen Whiſt mit einander, ein jeder hält ſeine Karte in der Hand, ich habe vier Koeur in meiner Karte, davon eins das Wählblatt iſt. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit für mich, daſs Peter in ſeiner Karte vier Koeur, Jakob drei, und folglich Johann zwei Koeur hat?*

Auflösung. 1. Um zu finden, auf wie viel Arten die beſtimmte Begebenheit ſtatt finden kann, oder welches einerlei iſt, den Zähler der verlangten Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, kommt es darauf an, daſs man zuerſt ſuche, auf wie viel Arten die (4+3+2) oder neun Koeur, welche nicht mit in meiner Handkarte ſind, in drei Theile, den erſten von vier für Petern, den zweiten von drei für Jakob, und folglich den dritten von zwei für Johann zerleget werden können. Um dieſe Anzahl von Arten zu erhalten, muſs man in der allgemeinen Formel

$$\frac{m\ldots\ldots(m-q+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;.\;q} \cdot \frac{(m-q)\ldots\ldots(m-q-q'+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;.\;q'}$$ (Kap. V. §. 6. und 7.) $m=9$, $q=4$, $q'=3$ und $m-q-q'=2$ ſetzen; hiedurch verwandelt ſie ſich in $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}$.

Aber zu einer jeden von diesen Arten müssen die 30 übrigen Kartenblätter in drei Theile, den einen von neun Blättern für Petern, den zweiten von zehn Blättern für Jakob, und den dritten von eilf Blättern für Johann eingetheilt werden, welches auf $\frac{30\,.\,.\,.\,.\,.\,10}{1.2\ldots10.1.2\ldots11}$ Arten geschehen kann. Folglich ist der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.1.2}\cdot\frac{30\,.\,.\,.\,.\,10}{1.2\ldots10.1.2\ldots11}.$$

2. Der Nenner ist die Anzahl der Arten, auf welche die 39 Blätter, welche nicht in meiner Karte sind, zu drei gleichen Theilen unter die drei Mitspieler Peter, Jakob und Johann vertheilt werden können. Nun ist aber die Anzahl der Arten, auf welche 39 Karten in drei gleiche Theile eingetheilt werden können, $\frac{39\ldots14}{(1.2\ldots13)^2}$; und zu einer jeden von diesen Arten können die drei Theile zwischen Peter, Jakob und Johann wiederum auf 1 . 2 . 3 oder 6 Arten ausgetheilt werden (Kap. VI. §. 4.); denn wenn Peter den $\begin{cases}\text{1sten}\\\text{2ten}\\\text{3ten}\end{cases}$ Theil erhält, so

$$\text{kann Jakob den}\begin{cases}\begin{bmatrix}\text{2ten}\\\text{3ten}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\text{1sten}\\\text{3ten}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\text{1sten}\\\text{2ten}\end{bmatrix}\end{cases}\text{und Johann den}\begin{bmatrix}\text{3ten}\\\text{2ten}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{3ten}\\\text{1sten}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{2ten}\\\text{1sten}\end{bmatrix}$$

erhalten. Folglich ist der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit $6\,.\,\frac{39\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,14}{(1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,13)^2}$; und also

diese Wahrscheinlichkeit

$$\frac{9\ldots\ldots5}{1.2.3.1.2}\cdot\frac{30\ldots\ldots10}{1.2\ldots10.1.2\ldots11}:6.\frac{39\ldots14}{(1.2\ldots13)^2}=\frac{9295}{740962}.$$

Kapitel IX.

Vom Lotto.

§. 1.

Frage. 6. *Es hat jemand eine von den neunzig Nummern des Zahlen-Lotto zu einem einfachen Auszuge, oder zwei zu einer einfachen Ambe, oder drei zu einer Terne, oder vier zu einer Quaterne, oder fünf zu einer Quine besetzt. Man fragt, wie groſs in jedem Falle die Wahrscheinlichkeit sein wird, daſs alle diese Nummern am nächsten Ziehungstage herauskommen werden?*

Auflösung. Man setze in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 20. $m = 90$, $q = 5$, und nach und nach anstatt r die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5; so giebt sie

für den ersten Fall: $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$,

— — 2ten — $\frac{5.4}{90.89} = \frac{2}{801} = \frac{1}{400,5}$,

— — 3ten — $\frac{5.4.3}{90.89.88} = \frac{1}{11748}$,

— — 4ten — $\frac{5.4.3.2}{90.89.88.87} = \frac{1}{511038}$,

— — 5ten — $\frac{5.4.3.2.1}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{43949268}$. *W.Z.F.**)

*) Man erhält also die Wahrscheinlichkeit, mit der
jeder gegebene einfache Auszug,
jede gegebene Ambe,

§. 2.*

Hat man n Nummern zu einfachen Auszügen besetzt, und sucht die Wahrscheinlichkeit wenigstens einen einfachen Auszug zu erhalten; so setze man in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 18. $m=90$ und $q=5$, wodurch sie sich verwandelt in

$$1-\frac{(90-n)(89-n)(88-n)(87-n)(86-n)}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}$$

welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist; die man ebenfalls, nur unter einer andern Gestalt, aus angeführtem Kapitel §. 27. findet, wenn man die nur genannten Werthe für m und q, und $r=1$ setzt. So ist, wenn $n=2$ bedeutet, diese Wahrscheinlichkeit $1-\frac{85\cdot 84}{90\cdot 89}$ oder $\frac{5\cdot 4}{90\cdot 89}\cdot\left(1+2\cdot\frac{85}{4}\right)=\frac{29}{267}$.

§. 3.*

Hat man n Nummern zu Amben besetzt, und verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, wenigstens eine Ambe zu erhalten; so setze man in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 27: $m=90$, $q=5$ und $r=2$, wodurch sie sich in folgende verwandelt:

$$\left\{\begin{array}{l}(n-4)(n-3)(n-2)+\\ 5\cdot(90-n)(n-3)(n-2)+\\ 10.(90-n)(89-n)(n-2)+\\ 10.(90-n)(89-n)(88-n)\end{array}\right\}\cdot\frac{n.(n-1)}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}$$

jede gegebene Terne,
— — — Quaterne,
— — — Quine
am Ziehungstage zu hoffen ist, wenn man die Menge der in fünf Nummern enthaltenen Combinationen von gegebener Art, durch die Menge ebenderselben in 90 Nummern enthaltenen dividirt.

Anm. des Uebers.

welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist. Für $n=3$ bekömmt man $\frac{3\,.\,2}{90\ldots.86}\,.\begin{bmatrix}10.87.86.1+\\10.87.86.85\end{bmatrix}$ oder $\frac{43}{5874}$.

§. 4.*

Hat man n Nummern zu Ternen besetzt, so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine Terne zu erhalten, wenn man in der allgemeinen Formel Kap. V. § 27, $m=90$, $q=5$ und $r=3$ setzt, $=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{90\,.\,.\,.\,.\,.\,86}\,.\begin{bmatrix}(n-4)(n-3)+\\5\,(90-n)(n-3)+\\10.(90-n)(89-n)\end{bmatrix}.$$

Hat man n Nummern zu Quaternen besetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine Quaterne zu erhalten (Kap. V. §. 27.)

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}.(n-4+5(90-n)).$$

Sind endlich n Nummern zu Quinen besetzt worden, so ist die Wahrscheinlichkeit eine Quine zu erhalten:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{90\,\cdot\,89\,\cdot\,88\,\cdot\,87\,\cdot\,86}$$ (ebendaselbst §. 24).

§. 5.*

Wenn man auf Amben spielet, so muss für jede einzelne, in der Anzahl von Nummern, die besetzt werden, enthaltene Ambe, der Einsatz geschehen. Ist die Menge der gewählten Nummern $= n$; so ist die Anzahl der darin enthaltenen Amben $= \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$. Und wenn jene $n+1$ gesetzt wird, so ist diese $\frac{(n+1)n}{1\,.\,2} = \frac{n^2+n}{1\,.\,2} = \frac{n^2-n+2n}{1\,.\,2} = \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} + n$. Wenn demnach die Menge der in n Nummern enthaltenen Amben bekannt ist; so

weiſs man auch die Menge derer, welche in der nächſt-höhern Anzahl enthalten ſind.

Die Menge der in n Nummern enthaltenen Ternen iſt $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, und die Menge der in $n+1$ Nummern enthaltenen $=\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}=\frac{(n-2+3)n(n-1)}{1.2.3}$ $=\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{1.2.3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}$; daſs ſich alſo aus jeder vorhergehenden Zahl die zunächſt folgende finden läſst. Nämlich um die Zahl der in $n+1$ Nummern enthaltenen Ternen zu bekommen, addirt man die Menge der in n Nummern enthaltenen Ternen zu der Menge der in eben ſo viel Nummern enthaltenen Amben.

Die Anzahl der in n Nummern enthaltenen Quaternen iſt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$, und die Anzahl der in $n+1$ Nummern enthaltenen $=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}=$ $\frac{(n-3+4)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+$ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

Die Anzahl der in $n+1$ Nummern enthaltenen Quinen iſt:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5}=\frac{(n-4+5)n\ldots(n-3)}{1.2\ldots\ldots5}=$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=$$

der Menge aller in n Nummern enthaltenen Quinen + der Menge aller in n Nummern enthaltenen Quaternen.

§. 6.*

Für einfache Auszüge ist, wenn man neunzig Nummern kauft, und der einfache Einsatz $= C$ gesetzt wird, die gewisse Ausbeute $5 \cdot 15\ C$ oder $75 \cdot C$, hingegen der sämmtliche Einsatz des Spielers $= 90 \cdot C$; also ist der Gewinnst desselben $= 75\ C - 90\ C = -15\ C$, welcher Ausdruk so viel sagen will, daſs der Spielende in dem Falle nicht nur gar nichts gewinnet, sondern auch noch überdies funfzehnmal seinen Einsatz verlieret. Hieraus folget aber, daſs das Lottospiel, wenn Nummern zu einfachen Auszügen besetzt werden, in dem Falle, wenn die Mise funfzehnmal ausgezahlt wird, ungerecht sein muſs. Eben so wird bei Amben, für $n = 90$ der gewisse Verlust $= 1305 \cdot C$ sein, woraus ebenfalls klar ist, daſs das Spiel zu Amben, wenn eine Ambe den Einsatz 270 mal gewinnt, auch unrechtmäſsig ist. Und so läſst sich ferner die Unregelmäſsigkeit des Lottospiels auch bei den drei folgenden Spielarten zeigen.

§. 7.*

Wenn man eine gewisse Anzahl von Nummern, jede z. B. mit einem Rthlr. zu einfachen Auszügen besetzen will; so kann man fragen, wie viel Nummern man kaufen müsse, um bei einfachen Auszügen nichts gewinnen und nichts verlieren zu können? Diese Anzahl Nummern ist hier $= 75$, und heiſst die Grenze des Einsatzes für einfache Auszüge. Kauft man also mehr als 75 Nummern; so ist gewisser Verlust vorhanden. Bei 75 Nummern übersteiget der Einsatz $= 2775 \cdot C$ zu Amben, die höchst mögliche Ausbeute $= 2750 \cdot C$; bei 74 besetzten Nummern hingegen ist der Einsatz $= 2701 \cdot C$, um etwas geringer, als der gröſst mögliche Gewinnst; daſs also in dem Falle bei 75 Nummern der Verlust nothwendig und unvermeidlich, hingegen bei 74 Nummern noch etwas zu erbeuten möglich ist. Demnach fällt die Grenze des Einsatzes für Amben zwischen die Zahlen 74 und 75.

Auf

Auf eine ähnliche Art findet man die Grenze des Einsatzes für Ternen = 69; für Quaternen = 55; für Quinen = 28, wenn die Quine nur 100000 mal bezahlt wird.

Und so erhellet auch aus dieser Untersuchung die Unrechtmäſsigkeit des Lottospiels, weil es bei einem regelmäſsigen Lotto entweder gar keine Grenze des Einsatzes geben, oder dieselbe bei allen fünf Spielarten = 90 sein muſs.

§. 8.

Frage 7. *Wie vielmal sollte rechtmäſsigerweise die Mise dem Spieler von der Lotterie bezahlt werden, im Fall daſs seine Nummern (§. 1.) herauskommen?*

Auflösung. Setzt jemand 1 auf eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $= \frac{n}{m}$ ist, so muſs, damit die Wette rechtmäſsig ist, die Mise desjenigen, welcher wider ihn das Gegentheil wettet $= \frac{m-n}{n}$ sein (Kap. I. §. 18.). Bedeutet also 1 die Mise, welche der Spieler in einem jeden der fünf genannten Fälle (§. 1.) in das Lotto setzet, und $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit, daſs diese Nummern herauskommen werden: so wird $\frac{m-n}{n} + 1$ oder $\frac{m}{n}$ die Summe angeben, welche die Lotterie rechtmäſsigerweise auszahlen muſs, wenn alle diese besetzten Nummern herausgezogen werden. Gesetzt also, daſs alle diese Nummern herauskommen; so muſs die Lotterie dem Spieler bei einfachen Auszügen, 18
— Amben, $400 + \frac{1}{2}$
— Ternen, 11748
— Quaternen, 511038
— Quinen, 43949268
mal seine

Mise 1 zurükbezahlen, wenn das Lotto regelmäſsig sein soll. *W. Z. F.*

§. 9.*

Kauft jemand n Nummern, und setzt auf die Begebenheit, daſs wenigstens eine davon herauskommt, nC: so läſst sich die Formel für die Mise x des Gegenspielers durch folgende Proportion finden:

$$1 - \frac{(90-n)....(86-n)}{90.....86} : \frac{(90-n)....(86-n)}{90.....86} = nC : x.$$

Also wird, wenn wenigstens eine von den besetzten Nummern herauskommt, dem Spieler ausgezahlt:

$$nC + x = \frac{90.....86 . nC}{90....86-(90-n)....(86-n)}.$$

§. 10.

Frage 8. *Wie groſs ist der Vortheil, den die Lotterie vor dem Spieler in einem jeden von den fünf oben genannten Fällen (§. 1.) bei ihren festgesetzten Bedingungen hat?*

Auflösung. Man subtrahire das Vielfache der Mise, welches die Lotterie zurükbezahlt, wenn die Nummern herauskommen, von demjenigen, das sie in diesem Falle nach der oben geführten Rechnung (§. 8.) rechtmäſsigerweise auszahlen sollte: so ist der Ueberschuſs der gesuchte Vortheil der Lotterie. Also bekömmt sie bei einfachen Auszügen: $18-15=3$,

— Amben, $400+\frac{1}{2}-270=130+\frac{1}{2}$,
— Ternen, $11748-5200=6548$,
— Quaternen, $511038-70000=441038$,
— Quinen, $43949268-1000000=42949268$;

Hieraus ersiehet man, daſs die Kasse in einem jeden dieser Fälle einen bestimmten Theil von dem, was sie rechtmäſsigerweise, wenn die Nummern gewinnen, auszahlen sollte, für sich behält; und zwar beträgt dieses

bei einfachen Auszügen: $\frac{3}{18}$ oder $\frac{1}{6}$ des rechtmäſsigen Gewinnes,

— Amben, $\frac{130+\frac{1}{2}}{400+\frac{1}{2}}$ oder $\frac{29}{89} = \frac{1}{3\frac{2}{29}}$ — — —

— Ternen, $\frac{6548}{11748}$ oder $\frac{1637}{2937} = \frac{1}{1\frac{1300}{2937}}$ — — —

— Quaternen, $\frac{441038}{511038}$ oder $\frac{220519}{255519} = \frac{1}{1\frac{35000}{255519}}$ — —

— Quinen, $\frac{42949268}{43949268}$ oder $\frac{10737317}{10987317} = \frac{1}{1\frac{250000}{10987317}}$ —

W. Z. F.

§. 11.*

Alſo iſt die gewöhnliche Einrichtung des Lotto numeriſch ungerecht, weil der Einleger nothwendig einen Verluſt leidet, wenn er die Grenze des Einſatzes überſchritten hat, welcher Verluſt deſto gröſser wird, je gröſser der Abzug iſt, den die Lottoherrn für ihre dabei gehabte Mühe anſetzen. Eben dieſe Unregelmäſsigkeit findet auch bei den beſtimmten Auszügen ſtatt, welche in dem nun folgenden §. 12. unterſucht werden ſollen.

§. 12.

Frage. 9. *Die Wahrſcheinlichkeit des Spielers und den Vortheil der Lotterie bei einem beſtimmten Auszuge und einer beſtimmten Ambe zu finden.*

Auflösung. Um die Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, daſs {die einzelne Nummer / die zwei Nummern} welche zu

$\left\{\begin{matrix}\text{einem beſtimmten Auszuge}\\ \text{einer beſtimmten Ambe}\end{matrix}\right\}$ beſetzt worden, an der beſtimmten Stelle $\left\{\begin{matrix}\text{herauskommen wird}\\ \text{herauskommen werden}\end{matrix}\right\}$: ſetze man in der allgemeinen Formel des Kap. VI. §. 57. (oder kürzer in $\frac{1}{m\ldots.(m-n+1)}$ ebendaſelbſt §. 45.) $m=90$, $q=5$, $n=r=\left\{\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right\}$: ſo verwandelt ſie ſich in

$$\left\{\begin{matrix}\frac{89\ldots.86}{90\ldots.86}=\frac{1}{90}\\ \frac{88\ldots.86}{90\ldots.86}=\frac{1}{90.89}=\frac{1}{8010}\end{matrix}\right\}$$

welches die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt.

Demnach müſste die Lotterie, wenn gewonnen wird, bei einem regelmäſsigem Spiele, dem Spieler $\left\{\begin{matrix}90\\ 8010\end{matrix}\right\}$ mal ſeine Miſe 1 zurükbezahlen. Alſo iſt der Vortheil der Lotterie in dieſem Falle

$$\left\{\begin{matrix}\frac{90-70}{90}=\frac{2}{9}\\ \frac{8010-4900}{8010}=\frac{311}{801}\end{matrix}\right\}$$ *W. Z. F.*

§. 13.*

Beſetzt man n Nummern, jede zu einem beſtimmten Auszuge; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit wenigſtens einen beſtimmten Auszug zu erhalten, wenn man in der allgemeinen Formel Kap. VI. §. 58. $m=90$, $q=5$ und $r=1$ ſetzt.

Kapitel X.

Geometrische Aufgaben.

§. 1.

Frage 10. *Auf einer horizontalen und quadratischen Ebene, A B E D, in welche ein Kreis H G F I beschrieben worden ist (Fig. 1.) lasse man eine Kugel frei herum laufen. Man fragt, wie groſs die Wahrscheinlichkeit ist, daſs die Kugel, wenn sie sich zu bewegen aufhört, in dem erwähnten Kreise anhalten wird?*

Auflösung. Es heiſse $\frac{n}{m}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit: so ist

1. die Summe aller Punkte im Quadrate $ABED$, oder welches einerlei ist, der Flächeninnhalt dieses Quadrats, die Anzahl aller Fälle: folglich ist $m = AB^2$, und wenn r den Halbmesser CF des eingeschriebenen Kreises bedeutet, so hat man $m = 4r^2$.

2. Die Summe aller Punkte der Fläche des eingeschriebenen Kreises, oder welches einerlei ist, der Flächeninnhalt des eingeschriebenen Kreises, ist die Anzahl der Fälle, welche die Begebenheit geben, deren Wahrscheinlichkeit man sucht: also ist $n = \text{Umfang } HGFI . \frac{CF}{2}$; und wenn β die Verhältniſs des Kreisumfangs zum Durchmesser anzeigt, $1 : \beta = 2 . CF : \text{Umfang } HGFI$; folglich $\text{Umfang } HGFI = \beta . 2 . CF$; also $n = \beta . CF^2 = \beta . r^2$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n}{m} = \frac{\beta r^2}{4r^2} = \frac{\beta}{4} = 0,7853981 \; . \; . \; . \; . \quad W. Z. F.$$

Folglich ist diejenige Wahrscheinlichkeit, daſs die Kugel ausserhalb dem Kreise stille stehen wird,

$$= 1 - 0,7853981 \ldots = 0,2146018 \; . \; . \; . \; . \; .$$

§. 2.

FRAGE II. *Auf einer horizontalen und quadratischen Ebene, ABED (Fig. 2.) in welche ein ordentliches Achtek abcdefgh eingeschrieben worden ist, läſst man, ohne zu zielen, eine Kugel hinrollen, so lange bis sie stille stehet, und wiederholet solches viermal hinter einander. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daſs die Kugel wenigstens einmal auſserhalb des regulairen Achteks stehen bleiben wird?*

AUFLÖSUNG. Wenn t die Seite des Quadrats, und u die Seite des regulairen Achteks bedeutet: so hat man $ah = \sqrt{(Aa^2 + Ah^2)}$; also ab oder $u = Aa . \sqrt{2}$, weil $Aa = Ah$. Es ist aber $AB = Aa + ab + bB = 2 . Aa + ab$, weil $Aa = bB$; also $t = 2 . Aa + u$; folglich $Aa = \frac{t-u}{2}$; also $u = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$, oder $u . \sqrt{2} = t - u$; folglich $u = \frac{t}{\sqrt{2}+1}$.

Nun ist der Flächeninnhalt des Quadrats $ABED = t^2$; und der Flächeninnhalt des Achteks: Umfang $abcdefgh . \frac{CF}{2} = 8u . \frac{t}{4} = 2tu = \frac{2t^2}{\sqrt{2}+1}$. Also ist der Flächeninnhalt des Quadrats weniger dem Flächeninnhalte des regulairen Achteks:

$$t^2 . \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}\right) = t^2 . \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1};$$

dieser Ausdruk würde in einem Versuche der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein, deren Nenner t^2 sein würde; folglich wäre in einem Versuche die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; es sind aber nach der Annahme vier Versuche; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (Kap. VII. §. 5.):

$$1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^4 = 1 - \frac{2^4}{(\sqrt{2}+1)^4} = \frac{(\sqrt{2}+1)^4 - 2^4}{(\sqrt{2}+1)^4} =$$

$$\frac{4+8\sqrt{2}+12+4.\sqrt{2}+1-16}{4+8\sqrt{2}+12+4.\sqrt{2}+1}=\frac{1+12.\sqrt{2}}{17+12.\sqrt{2}}.$$

W. Z. F.

§. 3.

Frage 12. *Auf einer horizontalen Kreisebene AFBKDG (Fig. 3.) deren Durchmeſſer AK (= 2 r) iſt, und in welche ein gleichſeitiges Dreiek ABD, und ein Quadrat HFGI beſchrieben worden ſind, deren Grundlinien BD und HI gleichlaufend, und auf dem Durchmeſſer AK ſenkrecht ſind; läſst man eine Kugel, bis ihre Bewegung aufhört, herumrollen, und wiederholet eben dieſes achtmal hinter einander. Wie groſs wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs in dieſen acht Verſuchen die Kugel wenigſtens einmal in dem Dreiek, und wenigſtens einmal in dem Quadrate ſtille ſtehen wird?*

Auflösung. Wenn in einem Verſuche, $\frac{n}{m}$ die Wahrſcheinlichkeit bedeutet, daſs die Kugel in dem Dreiek, und $\frac{p}{m}$ die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Kugel in dem Quadrate ſtehen bleiben wird; φ die Anzahl der Fälle iſt, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, ſo wird

$$\frac{m^8-(m-n)^8-(m-p)^8+(m-n-p+\varphi)^8}{m^8}$$

die geſuchte Wahrſcheinlichkeit ſein (Kap. VII. §. 56. und §. 59. VI.)

Es iſt aber m der Flächeninnhalt des Kreiſes *AFBKDG*; n der Innhalt des Dreieks *ABD*; p die Oberfläche des Quadrats *HFGI*; und φ die Fläche des unordentlichen Sechseks $OQRTSP = n - BR.QR - ON.AN.$ Demnach hat man:

1) $m = \beta r^2$ (wo β die Verhältniſs des Kreisumfangs zum Durchmeſſer ausdrükt).

2) $n = BM \,.\, AM = \sqrt{(BK^2 - MK^2)} \,.\, AM$. Nun iſt $BK = r$; weil das Perpendikel CM nicht nur die Sehne BD, ſondern auch den dazu gehörigen Kreisbogen $BKD = \frac{1}{3}$ des Umfangs $AFBKDG$, in K halbirt, und alſo BK die Sehne des ſechſten Theiles des Kreisumfangs iſt. Ferner iſt $MK = \frac{1}{2} r$; denn in dem gleichſeitigen Dreiek CBK iſt BM ein Perpendikel aus der Spitze B auf die Grundlinie CK und halbirt folglich ſelbige. Endlich iſt $AM = AC + CM = r + \frac{1}{2} r = \frac{3r}{2}$. Demnach bekömmt man: $\sqrt{(BK^2 - MK^2)} \,.\, AM = \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)} \,.\, \frac{3r}{2}$, oder $n = \frac{3\sqrt{3}}{4} \,.\, r^2$.

3) $KL \,.\, LA = HL^2$; alſo $KL \,.\, (LN + NA) = HL^2$, oder $KL \,.\, (HI + KL) = \frac{HI^2}{4}$, denn $LN = FH = HI$; $NA = KL$, weil die gleichen Sehnen FG, HI, vom Mittelpunkte des Kreiſes C gleich weit entfernt ſind. Alſo iſt $KL^2 = -HI \,.\, KL + \frac{HI^2}{4}$, und wenn man dieſe quadratiſche Gleichung auflöſt, ſo erhält man

$$KL = \frac{HI}{2} \,.\, (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{p}}{2} (\sqrt{2} - 1).$$

Aber $KL = AK - LA = 2r - NL - AN = 2r - \sqrt{p} - KL$; alſo $2 \,.\, KL$ oder $\sqrt{p} \,.\, (\sqrt{2} - 1)$ oder $\sqrt{2p} - \sqrt{p} = 2r - \sqrt{p}$; folglich $\sqrt{2p} = 2r$, und hieraus $p = 2r^2$.

4) $BR = MB - HL$; Nun ist $MB = \frac{1}{2} . BD = \frac{1}{2} . r\sqrt{3}$ *),
$HL = \frac{1}{2} . HI = \frac{1}{2} . \sqrt{p}$, folglich $MB - HL = \frac{\sqrt{3}}{2} . r - \frac{\sqrt{p}}{2}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} . r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$ oder $BR = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} . r$.

Ferner $BR : QR = MB : AM$, das ist $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} . r : QR$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} r : \frac{3r}{2}$ oder $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} . r : QR = 1 : \sqrt{3}$, folglich $QR =$
$\frac{3-\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2} . r$.

Also $BR . QR = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} r . \frac{3-\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2} r =$
$\frac{r^2 . \sqrt{3}}{4} . (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} . (5-2.\sqrt{3}.\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4} . r^2$.

Auch ist AN oder $KL : ON = AM : BM$, das ist
$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \sqrt{p}$ oder $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} . r : ON = \frac{3r}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} . r$, oder
$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} . r : ON = \sqrt{3} : 1$, folglich $ON = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}} . r$.

Demnach $ON . AN = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2} . \sqrt{3} . \sqrt{2}} . r^2 =$
$\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} . r^2$.

*) Denn $BM^2 = BC^2 - CM^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{3r^2}{4}$, folglich
$BM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, und $2 . BM$ oder $BD = r . \sqrt{3}$.

Alſo iſt $\varphi = n - BR \,.\, QR - ON \,.\, AN =$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \,.\, r^2 - \frac{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{4} \,.\, r^2 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \,.\, r^2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 - \frac{5\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{6\sqrt{2}}{4} r^2 - \frac{3}{2\sqrt{3}} r^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r^2$$

$$= \left[\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right] \,.\, r^2.$$

Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\frac{\beta^8 - \left[\beta - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]^8 - (\beta - 2)^8 + \left[\beta - 2 - 7 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]^8}{\beta^8}$$

W. Z. F.

§. 4.

Frage 13. *Ueber einer horizontalen Ebene, die in gleiche regulaire Felder eingetheilt iſt, werfe man einen Thaler in die Höhe. Wie groſs ſind die Wahrſcheinlichkeiten, daſs der Thaler auf ein einziges oder auf mehrere Felder zugleich fallen wird?*

Auflösung. Die Felder, welche vermöge der Annahme gleiche regulaire Vieleke ſind, ſind nothwendig entweder gleiche gleichſeitige Dreieke, oder gleiche Quadrate, oder gleiche regulaire Sechseke.

1) Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs der Thaler auf ein einziges Feld fallen wird: beſchreibe man in eins von den Feldern,

in das Dreiek *ABC*, Fig. 4.	eine ähnliche Figur	*abc*
in das Quadrat *ABCD*, Fig. 5.		*abcd*
in das Sechsek *ABCDEF*, Fig. 6.		*abcdef*

die von den Seiten des Feldes um die Länge *Gg* des Halbmeſſers des Thalers entfernt iſt: ſo iſt klar, daſs, wenn

der Mittelpunkt des Thalers auf die Oberfläche der eingeschriebenen Figur fällt, der Thaler ganz und gar auf dieses Feld fallen wird; und dass, wenn der Mittelpunkt des Thalers ausserhalb dieses innern Polygons fällt, der Thaler wenigstens zum Theil ausserhalb des Feldes fallen wird. Folglich ist der Flächeninnhalt

$$\left\{\begin{array}{l}\text{des Dreieks } ABC \\ \text{des Quadrats } ABCD \\ \text{des Sechseks } ABCDEF\end{array}\right\} \text{ die Anzahl aller Fälle;}$$

$$\text{und der Flächeninnhalt } \left\{\begin{array}{l}\text{des Dreieks } abc \\ \text{des Quadrats } abcd \\ \text{des Sechseks } abcdef\end{array}\right\} \text{ die An-}$$

zahl der Fälle, welche die Begebenheit geben, deren Wahrscheinlichkeit gesucht wird. Also ist die Wahrscheinlichkeit P dass der Thaler mit seinem ganzen Um-

$$\text{fange auf das } \left\{\begin{array}{l}\text{Dreiek} \\ \text{Quadrat} \\ \text{Sechsek}\end{array}\right\} \text{ fallen wird, } =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Fläche } abc}{\text{Fläche } ABC} \\[2ex] \dfrac{\text{Fläche } abcd}{\text{Fläche } ABCD} \\[2ex] \dfrac{\text{Fläche } abcdef}{\text{Fläche } ABCDEF}\end{array}\right\}$$

Wenn k die Seite des Feldes, r den Halbmesser des Thalers bedeutet, und O der Mittelpunkt des Polygons ist: so hat man $\triangle ABC = \frac{k.BG}{2}$; aber $BG =$

$\sqrt{(AB^2 - AG^2)} = \frac{k.\sqrt{3}}{2}$; folglich $\triangle ABC = \frac{k^2.\sqrt{3}}{4}$.

Eben so ist $\triangle abc = \frac{bc^2.\sqrt{3}}{4}$; aber $AB : bc = BG : bg$;

nun ist $BG = 3 . OG$, und $bg = 3 . Og$, folglich $AB : bc = OG : Og$, oder

$$AB : bc = \frac{BG}{3} : \left(\frac{BG}{3} - Gg\right),$$ das ist

$$k : bc = \frac{k.\sqrt{3}}{6} : \left(\frac{k.\sqrt{3}}{6} - r\right),$$ also

$$bc = \left(\frac{k.\sqrt{3}}{6} - r\right) . \frac{6}{\sqrt{3}} = k - 2r.\sqrt{3},$$

und $\triangle abc = \dfrac{(k-2r.\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4}$.

Demnach ist für das Dreiek (Fig. 4.):

$$P = \frac{\triangle abc}{\triangle ABC} = \frac{(k-2r.\sqrt{3})^2}{k^2} = \frac{k^2 - 4kr\sqrt{3} + 12r^2}{k^2}$$

In dem Quadrate (Fig. 5.) ist

$$AB : OG = ab : Og \text{ oder } OG - Gg,$$ das ist

$$k : \frac{k}{2} = ab : \left(\frac{k}{2} - r\right),$$ also

$$ab = \left(\frac{k}{2} - r\right) . 2 = k - 2r.$$

Demnach ist für das Quadrat:

$$P = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{k^2 - 4kr + 4r^2}{k^2}.$$

In dem Sechsek (Fig. 6.) ist $OG^2 = AO^2 - AG^2 = AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k^2 - \frac{1}{4}k^2 = \frac{3k^2}{4}$, also $OG = \frac{k}{2}\sqrt{3}$.

Ferner AO oder $AB : ao$ oder $ab = OG : Og$ oder $OG - Gg$, das ist $k : ab = \dfrac{k.\sqrt{3}}{2} : \left(\dfrac{k\sqrt{3}}{2} - r\right)$,

folglich $ab = \left(\dfrac{k\sqrt{3}}{2} - r\right) . \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{k\sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}$.

Da nun Fläche $abcdef = 6 . \triangle aOf = 6 . \frac{ab . Og}{2} = 3 . ab . Og$; und eben so Fläche $ABCDEF = 3 . AB . OG$; so ist für das Sechsek:

$$P = \frac{ab . Og}{AB . OG} = \frac{\left(\frac{k . \sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}\right) . \left(\frac{k\sqrt{3}}{2} - r\right)}{\frac{k^2 . \sqrt{3}}{2}}$$

$$= \left(\frac{k^2\sqrt{3}}{2} - kr - kr + \frac{2r^2}{\sqrt{3}}\right) . \frac{2}{k^2\sqrt{3}} = \frac{3k^2 - 4kr . \sqrt{3} + 4r^2}{3k^2}.$$

Setzt man $\frac{1}{2} = \begin{bmatrix} (k^2 - 4kr\sqrt{3} + 12r^2) : k^2 \\ (k^2 - 4kr + 4r^2) : k^2 \\ (3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2) : 3k^2 \end{bmatrix}$; so bekömmt man $\frac{k}{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} . (2 + \sqrt{2}) \\ 2 . (2 + \sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} . (2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix}$. Dieses giebt für das Dreiek, Quadrat und Sechsek, die Verhältniss zwischen der Seite des Polygons und dem Halbmesser des Thalers, wenn bei gleichen Misen, die Wette, dass der Thaler ganz auf ein einziges Feld fallen wird, rechtmäsig sein soll.

2) Die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass der Thaler auf zwei oder eine grössere Zahl Felder fallen wird; bemerke man, dass diese Begebenheit statt finden wird, wohin auch der Mittelpunkt des Thalers zwischen die Umfänge $\begin{bmatrix} ABC \text{ und } abc \\ ABCD \text{ und } abcd \\ ABCDEF \text{ und } abcdef \end{bmatrix}$ fallen

mag; also läſst ſich die Anzahl der Fälle, welche dieſe Begebenheit geben, durch den Innhalt der Flächen ausdrüken, welche dieſe Umfänge einſchlieſsen, das iſt,

$$\text{durch} \begin{cases} 3kr - 3\sqrt{3}\,.\,r^2, & \text{in dem Dreiek,} \\ 4kr - 4r^2, & \text{in dem Quadrate,} \\ 6kr - 2\sqrt{3}\,.\,r^2, & \text{in dem Sechsek} \end{cases}$$

Demnach erhält man

$$P = \begin{cases} (4kr\,.\sqrt{3} - 12\,.\,r^2) : k^2 \\ (4kr - 4r^2) : k^2 \\ (4kr\,.\sqrt{3} - 4r^2) : 3k^2 \end{cases} \text{für das Drei-}$$

ek, Quadrat und Sechsek; und wenn man jede dieſer Wahrſcheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ gleich ſetzet, ſo findet man

$$\text{wie vorher (in 1)}\ \frac{k}{r} = \begin{cases} 2\,.\sqrt{3}\,.\,(2+\sqrt{2}) \\ 2\,.\,(2+\sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,.\,(2+\sqrt{2}) \end{cases}.$$

3) Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs der Thaler wenigſtens auf drei Felder fallen wird, verlängere man aus jeder Winkelſpitze der eingeſchriebenen Figuren die Seiten dieſer Figuren, bis ſie in dem Umfange des Feldes eintreffen: ſo wird die Summe der Parallelogramme *AMam*, welche dadurch entſtehen, die Zahl der Punkte ſein, wo der Mittelpunkt des Thalers hinfallen muſs, damit der Thaler auf mehr als zwei Felder falle; alſo wird die Summe dieſer Parallelogramme, das iſt, $3\,.\,Gg\,.\,AM = 3\,.\,r\,.\,\frac{2r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,.\,r^2$ für das Dreiek; $4\,.\,AM^2 = 4\,.\,r^2$ für das Quadrat; $6\,.\,Gg\,.\,AM = 4\,.\sqrt{3}\,.\,r^2$ für das Sechsek, die Anzahl der Fälle ſein, welche die beſtimmte Begebenheit geben: und wenn man dieſe Gröſse durch den Flächeninnhalt des Feldes, der die Anzahl aller Fälle iſt, dividirt, ſo wird man die ge-

ſuchte Wahrſcheinlichkeit erhalten: $\frac{2\sqrt{3}\,.\,r^2}{\frac{k^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{8\,r^2}{k^2}$ für das Dreiek; $\frac{4\,r^2}{k^2}$ für das Quadrat; $\frac{4\sqrt{3}\,.\,r^2}{3.\frac{k^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\,r^2}{3\,k^2}$ für das Sechsek. Setzt man dieſe Wahrſcheinlichkeiten, jede $= \frac{1}{2}$; ſo findet man $\frac{k}{r} = 4,\ 2\sqrt{2}$, und $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

4) Die Wahrſcheinlichkeit, daſs der Thaler nur auf zwei Felder fallen wird, wird gefunden, wenn man, in Erwägung, daſs ſolche Begebenheit alsdann ſtatt findet, wenn der Mittelpunkt des Thalers zwiſchen die Umfänge des Feldes und der innern Figur, und auſſerhalb der Parallelogramme *AMam* fällt, dieſe Flächenſtüken durch den Flächeninnhalt des Feldes dividirt. So bekömmt man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit, bei dem Dreiek:

$$\frac{\triangle ABC - \triangle abc - 3\,.\,\text{Parallelogr. } AMam}{\triangle ABC} =$$

$\frac{4\sqrt{3}\,.\,kr - 20\,.\,r^2}{k^2}$; bei dem Quadrate:

$\frac{AB^2 - ab^2 - 4\,r^2}{AB^2} = \frac{4\,kr - 8\,r^2}{k^2}$; und bei dem Sechsek:

$$\frac{3\,.\,AB\,.\,OG - 3\,.\,ab\,.\,Og - 4\sqrt{3}\,.\,r^2}{3\,.\,AB\,.\,OG} =$$

$\frac{4\,kr - 4\sqrt{3}\,.\,r^2}{\sqrt{3}\,.\,k^2}$. Setzt man dieſe Wahrſcheinlichkeiten dem Bruche $\frac{1}{2}$ gleich; ſo iſt für die rechtmäſsige

Wette zu gleichen Misen, $\frac{k}{r} = \frac{20}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ für das Dreiek; 4 für das Quadrat; und $\frac{2}{\sqrt{3}} . (2+\sqrt{-2})$ für das Sechsek. Hieraus erhellet, dafs, wenn die Felder reguläire Sechseke find, wegen der unmöglichen Gröfse $\sqrt{-2}$, keine rechtmäfsige Wette zu gleichen Misen möglich ist.

5) Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dafs der Thaler auf sechs dreiekigte oder auf vier quadratische oder auf drei sechsekigte Felder fallen wird: beschreibe man aus der Winkelspitze *C*, *D*, *F*, des Feldes, als einem Mittelpunkte, mit dem Halbmesser *Gg* des Thalers einen Kreis, welcher die Seiten des Feldes in den beiden Punkten *P* und *Q* schneidet: so werden die Ausschnitte

$$3 . PCQ = \frac{\beta r^2}{2};\ 4 . PDQ = \beta r^2;\ 6 . PFQ = 2\beta r^2;$$

(wo β die Verhältnifs des Kreisumfangs zum Durchmesser ist) die Anzahl der günstigen Fälle für das Dreiek, Quadrat und Sechsek ausdrüken. Also wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit *P* sein

$$= \frac{2\beta r^2}{\sqrt{3} . k^2} \text{ für das Dreiek;}$$

$$= \frac{\beta r^2}{k^2} \text{ für das Quadrat;}$$

$$= \frac{4\beta r^2}{3\sqrt{3} . k^2} \text{ für das Sechsek;}$$ und $P = \frac{1}{2}$ gesetzt, erhält man $\frac{k}{r} = \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2\beta}$, und $\frac{2\sqrt{2\beta}}{\sqrt[4]{3} . \sqrt{3}}$.

6) Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dafs der Thaler nur auf drei Felder und zwei Fugen fallen wird: subtrahire man von den Parallelogrammen

$3 . AMam$, $4 . AMam$, $6 . AMam$, oder $2\sqrt{3} . r^2$, $4 r^2$, $4\sqrt{3} . r^2$, die Kreisausschnitte $3 . PCQ$, $4 . PDQ$, $6 . PFQ$, oder $\frac{\beta}{2} r^2$, βr^2, $2\beta . r^2$; so werden die Unterschiede $\left(2\sqrt{3} - \frac{\beta}{2}\right) . r^2$, $(4-\beta) r^2$, $2 . (2 . \sqrt{3} - \beta) r^2$, die Anzahl der günstigen Fälle für das Dreiek, Quadrat und Sechsek angeben. Hieraus folgt $P = \frac{8 . \sqrt{3} - 2\beta}{\sqrt{3}} . \frac{r^2}{k^2}$, $(4-\beta) . \frac{r^2}{k^2}$, $\frac{8\sqrt{3} - 4\beta}{3\sqrt{3}} . \frac{r^2}{k^2}$; und wenn man jeden dieser Werthe von $P, = \frac{1}{2}$ setzt, so bekömmt man dadurch $\frac{k}{r} = \frac{2 . \sqrt{(4\sqrt{3} - \beta)}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2} . \sqrt{(4 - \beta)}$, und $\frac{2\sqrt{2} . \sqrt{(2\sqrt{3} - \beta)}}{3^{\frac{3}{4}}}$.

Die Methode, welcher wir uns bei der Auflösung dieser 13ten Frage bedient haben, kann gebraucht werden, um die Wahrscheinlichkeit von allen Lagen zu finden, welche der Thaler auf gleichen oder ungleichen irregulairen Feldern haben kann, dergleichen rechtwinklichte Dreieke, Rauten, rechtwinklichte oder schiefwinklichte Parallelogramme, u. s. f. sind.

Uebrigens haben wir diese und die folgende Frage aus einer Abhandlung in den Werken des Herrn von Büffon entlehnt, welche zur Ueberschrift hat: Versuch einer moralischen Rechenkunst (*Essai d'Arithmétique morale*).

§. 5.

Frage 14. *Ueber einem aus gleichen und parallelen Bretern zusammengesetzten Fussboden werfe man ein*

Stäbchen in die Höhe. Man ſucht die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſes Stäbchen, nachdem es herabgefallen, eine von den parallelen Fugen des Bodens durchkreuzen wird.

Auflösung. Es ſei $ABCD$ (Fig. 7.) eins von den Bretern: man ziehe zwiſchen den parallelen Fugen AB und CD, zwei andere Parallelen ab und cd, ſo, daſs eine jede derſelben um die halbe Länge des Stäbchens von den erſten beiden entfernt iſt.

1. So iſt klar, daſs, wenn die Mitte des Stäbchens in dem Raume $abcd$ ſich befindet, das Stäbchen, was es auch für eine Lage haben mag, weder AB noch CD ſchneiden kann.

2. Liegt die Mitte des Stäbchens in dem Raum $ABab$; ſo kann daſſelbe, nachdem es zu liegen kommt, die Fuge AB ſchneiden oder nicht ſchneiden. Man ziehe eine Perpendikularlinie HL zwiſchen den beiden Linien AB und ab auf dieſelben; beſchreibe aus irgend einem Punkte P dieſer Linie HL, als einem Mittelpunkte, mit der zum Halbmeſſer angenommenen halben Länge des Stäbchens, einen Kreis, der die Linie AB in den Punkten G und g, und die verlängerte HL in M ſchneidet: ſo läſst ſich, wenn die Mitte des Stäbchens auf den Punkt P, oder auf den unendlich kleinen Theil Pp fällt, die Anzahl der möglichen Lagen des Stäbchens, in welchen es AB ſchneidet, durch Pp . Bog GMg angeben, wie leicht einzuſehen iſt: und in jedem kleinen Theilchen Pp der Linie LH, wo die Mitte des Stäbchens hinfallen kann, läſst ſich die Anzahl der Lagen, in welchen das Stäbchen AB ſchneidet, durch das Produkt von Pp in den dazu gehörigen Bogen GMg ausdrüken. Wenn alſo dx und y die zuſammengehörigen veränderlichen Pp und GMg bedeuten; ſo wird ydx die Anzahl der Lagen ſein, wo das Stäbchen AB ſchneiden wird, ſo lange die Mitte deſſelben in einem unendlich kleinen Theilchen der Linie LH ſich befinden wird.

Folglich ist die Anzahl der Lagen, wo das Stäbchen *AB*, da die Mitte desselben in der Linie *LH* ist, schneiden wird, $= \int y\,dx$; und weil es in dem Raume *ABab* so viel Linien *LH* giebt, als Punkte in der Linie *AB* sind; so wird $AB . \int y\,dx$ die Anzahl der Lagen sein, wo das Stäbchen die *AB* schneidet, indem es mit seiner Mitte in dem Raume *ABab* liegt.

3. Fällt die Mitte des Stäbchens in den Raum *CDcd*, so findet man eben so die Anzahl der Lagen, wo der Stab *CD* schneidet, $= CD . \int y\,dx$, oder $AB . \int y\,dx$. Folglich ist die Anzahl der Fälle, welche die bestimmte Begebenheit geben, $= 2 . AB . \int y\,dx$.

4. Die Anzahl aller möglichen Lagen des Stäbchens auf dem Brete *ABCD* ist offenbar $AB . AC . c$ (wo *c* denjenigen Kreisumfang bedeutet, dessen Durchmesser die Länge des Stäbchens ist). Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{2 . AB . \int y\,dx}{AB . AC . c} = \frac{2 . \int y\,dx}{AC . c}$.

Um den Flächeninnhalt, welcher durch $\int y\,dx$ angedeutet wird, zu erhalten, verzeichne man eine gemeine Radlinie *BDAdb* (Fig. 8.), deren beschreibender Kreis die Länge des Stäbchens zum Durchmesser *AE* hat: durch die Mitte *C* der Linie *AE* ziehe man *DCd* mit der Grundlinie *BEb* der krummen Linie gleichlaufend, die von ihr in *D* und *d* geschnitten wird: aus ebendemselben Punkte *C*, zum Mittelpunkte angenommen, zeichne man den beschreibenden Kreis, welcher die Radlinie in ihrem Gipfel *A*, und die Grundlinie derselben in ihrer Mitte *E* berühret, und die gerade Linie *Dd* in den Punkten *M* und *m* schneidet.

Dem zu Folge ist die Fläche *MDAdm*, welche von der Radlinie, dem Kreise, und der Linie *Dd* begrenzt wird, $= \int y\,dx$: denn wenn man einen Punkt *P* irgendwo in der Linie $AC = LH$ annimmt; aus diesem

Punkte eine doppelte Ordinate RPR der Cycloide, der Grundlinie Bb gleichlaufend ziehet, welche den Kreis in Q und Q schneiden wird, ferner eine unendlich nahe doppelte Ordinate rpr ziehet, die den Kreis in q und q schneidet; so ist die kleine Fläche $RQqr = QR \,.\, Pp$; aber vermöge der Natur der Cycloide ist jede gerade Linie QR dem Bogen QA des beschreibenden Kreises gleich *); folglich ist die kleine Fläche $RQqr = Pp \,.\, AQ$; also $\int QRrq = \int Pp \,.\, AQ$, oder welches einerlei ist, die Fläche $2 \,.\, QARQ = \int QAQ \,.\, Pp = \int y\,dx$; folglich ist die Fläche $MDAmd =$ der Funktion $\int y\,dx$, in welcher man $x = AC = LH$ setzt.

5.* Nun ist noch übrig, dass man suche, $\int y\,dx$ in LH auszudrüken. Dieses kann folgendergestalt geschehen: Der Raum zwischen den Bogen AQ und AR und der geraden Linie RQ ist $= AQ \,.\, (AP - AC) + QP \,.\, AC$**), und verwandelt sich in $AC^2 = LH^2$ für $AP = AC = LH$. Folglich die Fläche $ADMA = LH^2$, und $2 \,.\, ADMA = MDAmd = 2 \,.\, LH^2 = \int y\,dx$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{2\int y\,dx}{AC \,.\, c} = \frac{4 \,.\, LH^2}{AC \,.\, c} = \frac{2 \,.\, LH}{AC \,.\, \beta}$, wo β die Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser anzeigt.

§. 6.

Wir wollen dieses Kapitel mit einer Frage beschliessen, deren Auflösung uns in den Stand setzen wird, die gemeine Meinung zu prüfen, ob eine nicht vortheilhafte Wette durch die Menge der Versuche vortheilhaft werde; so, dass jemand, der einmal eine solche Wette verloren, auf die Gefahr seines Glüks wiederum aufs neue mehrmal hinter einander zu wetten, wagen könne, damit er am Ende nicht nur alles, was er in allen vor-

*) *Kästners* Analysis endl. Grössen §. 607.

**) *Kästners* Analysis des Unendl. §. 559. VII.

hergehenden Versuchen verloren, wieder gewinne, sondern sogar überdies noch dazu, was er sogleich im ersten Versuche erbeuten wollte.

§. 7.

Frage 15. *Paul setzt die Mise 1 auf das Geschehen einer Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{m}$ ist; und Peter auf das Nichtgeschehen dieser Begebenheit die Mise F; unter folgenden Bedingungen:*

1) Wenn Paul beim ersten Versuche die Wette verliert, so macht er einen zweiten Versuch, und setzt die Mise $\frac{F+1}{F}$ gegen $1+F$ auf ebendieselbe Begebenheit;

2) Verliert Paul wiederum aufs zweitemal die Wette, so setzet er zum drittenmal $\left(\frac{F+1}{F}\right)^2$ gegen $1+\frac{F+1}{F}+F$ oder $\frac{(F+1)^2}{F}$ auf die vorige Begebenheit;

3) Verliert Paul noch einmal, so setzt er wiederum aufs neue, um einen vierten Versuch zu unternehmen, $\left(\frac{F+1}{F}\right)^3$ gegen $1+\frac{F+1}{F}+\left(\frac{F+1}{F}\right)^2+F$ oder $\frac{(F+1)^3}{F^2}$ auf ebendiese Begebenheit;

4) Verliert Paul zum viertenmale, so wird die Wette nach ebendemselben Gesetze wiederholt; und so wird ferner fortgefahren bis zum xten Versuche.

Gewinnt Paul vor oder bei dem xten Versuche, so wird ihm als Gewinnst die Summe F zu Theil (oder es werden ihm alle seine Misen nebst der Summe F, die er anfangs im ersten Versuche gewinnen wollte, ausgezahlt);

und verliert er in allen x Verſuchen, ſo wird Petern die Summe der Miſen des Paul ausgezahlt, das iſt:

$$1+\frac{F+1}{F}+\left(\frac{F+1}{F}\right)^2+\ldots+\left(\frac{F+1}{F}\right)^{x-1},$$

oder $$\frac{(F+1)^x-F^x}{F^{x-1}}.$$

Man fragt, ob die Bedingungen, unter welchen Paul ſolchergeſtalt die Wette x mal hinter einander zu erneuern die Erlaubniſs hat, dieſe Wette mehr oder weniger vortheilhaft, als ſie in einem Verſuche geweſen ſein würde, für ihn machen werden.

Auflösung. 1) Die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Begebenheit, auf welche Paul ſetzet, in x Verſuchen ſich ereignen wird, iſt $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^x$ (Kap. VII. §. 5.).

2) Die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſie ſich nicht ereignen wird, iſt $\left(1-\frac{n}{m}\right)^x$ (ebendaſ. §. 3.).

3) Die Summe, welche Paul verlieret, wenn ſie ſich nicht ereignet, iſt $\frac{(F+1)^x-F^x}{F^{x-1}}$.

4) Die Summe, welche Paul gewinnet, wenn ſie ſich ereignet, iſt F. Alſo iſt das, was er gewinnen ſollte, wenn die Begebenheit, auf welche er ſetzet, geſchiehet, das vierte Glied y folgender Proportion:

$$1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^x:\left(1-\frac{n}{m}\right)^x=\frac{(F+1)^x-F^x}{F^{x-1}}:y=$$

$$\frac{\left((F+1)^x-F^x\right).\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{F^{x-1}-F^{x-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}\text{ (Kap. I. §. 18.).}$$

Hieraus ersiehet man, daſs der Vortheil des Paul in dieser Wette (wenn einer vorhanden iſt) die Verhältniſs des Ueberschuſſes desjenigen iſt, was er bekömmt, über das was er, im Fall er gewinnet, rechtmäſsig erhalten ſoll, zu dem was er rechtmäſsig erhalten ſoll; oder der Ueberschuſs der Summe F über y, dividirt durch y; das iſt

$$\frac{F-y}{y} = \frac{F - \dfrac{((F+1)^x - F^x)\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{F^{x-1} - F^{x-1}.\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}}{\dfrac{((F+1)^x - F^x)\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{F^{x-1} - F^{x-1}.\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}} =$$

$$\frac{F^x - F^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x - (F+1)^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x + F^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{((F+1)^x - F^x).\left(1-\frac{n}{m}\right)^x} =$$

$$\frac{F^x - (F+1)^x.\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{((F+1)^x - F^x).\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}.$$

Allein dieſer Vortheil iſt bejaht, o oder verneint, je nachdem

$$F^x \gtreqless (F+1)^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x, \text{ oder } F \gtreqless (F+1)\left(1-\frac{n}{m}\right),$$

$$\text{oder } Fm \gtreqless Fm + m - Fn - n, \text{ oder } Fn \gtreqless m - n;$$

oder endlich nachdem $F \gtreqless \frac{m-n}{n}$ ist.

Folglich bestimmt die Verhältniss von F zu $\frac{m-n}{n}$, welche den Vortheil, die Rechtmäfsigkeit, oder den Nachtheil der Wette in einem einzigen Versuche bestimmt, eben diese Dinge noch in x Versuchen: mit diesem Unterschiede, dafs die Wette, wenn sie bei einem Versuche rechtmäfsig ist, rechtmäfsig bleibt, wie grofs auch die Anzahl der Versuche sein mag; da im Gegentheil, wenn die Wette für einen der Wettenden vortheilhaft oder nachtheilig ist, dieser Vortheil oder Nachtheil in einer gegebenen Zahl x von Versuchen, nach einer Funktion von F, $\frac{m}{n}$, und x zunimmt.

Ohngeachtet also die Wahrscheinlichkeit des Wettenden bei der Vielfachheit der Versuche zunimmt; so siehet man, dafs, wenn beim ersten Versuche die Wette für ihn nachtheilig ist, sie es noch vielmehr bei den folgenden Versuchen wird: weil seine Misen in einer gröfsern Verhältnifs als die Wahrscheinlichkeiten der Begebenheit, die ihn gewinnen lassen kann, zunehmen.

Kapitel XI.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten durch Erfahrungen oder Beobachtungen.

§. 1.

Die Begebenheiten oder Sätze, deren Wahrscheinlichkeiten durch eine genaue Analyse zu berechnen möglich ist, sind sehr klein an der Zahl und von einer geringen Wichtigkeit, wenn man sie mit denjenigen in Vergleichung stellet, wo man weder eine Anzahl aller

gleich möglichen Fälle angeben, noch die Anzahl derjenigen darunter, welche für die Begebenheiten sind, bestimmen kann. Bei diesem Mangel kann man seine Zuflucht zu Beobachtungen und Erfahrungen nehmen, die zwar eine nicht ganz richtige, aber doch der Richtigkeit sehr nahe kommende Wahrscheinlichkeit an die Hand geben werden. In der That, es bestätiget auch die Erfahrung, dass bei einer Menge von Wiederholungen einer und ebenderselben Handlung, ebenderselben Bewegung, oder ebendesselben Zustandes die Anzahl des Wiederkommens einer jeden der davon abhängenden Begebenheiten ohngefähr der Wahrscheinlichkeit solcher Begebenheit allemal proportionirt ist. Zum Beispiel. Bei einer Menge von Würfen mit zwei gemeinen Spielwürfeln kann man ohngefähr fünf einfache Würfe auf einen Pasch rechnen, jede Seite wird ohngefähr eben so vielmal als jede andere zum Vorschein kommen, welches auch von jedem Pasche, und den übrigen Begebenheiten gilt. Macht man also die Anzahl aller Versuche zum Nenner, und setzt in den Zähler diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal eine Begebenheit in diesen Versuchen sich zugetragen hat, so bekömmt man einen Bruch, welcher der wahren und richtigen Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit sich nähern wird.

Diese jetzt erwähnte Methode wollen wir in gegenwärtigem Kapitel näher auseinandersetzen. Sie ist nicht blos auf die Erfahrung, noch auf ein wüstes Raisonnement gegründet, sondern eines strengen Beweises fähig, wie man aus den folgenden Sätzen ersehen wird.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn die Handlung oder Bewegung, wovon eine bestimmte Begebenheit abhängt, eine gewisse Anzahl x von malen wiederholet wird, und die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit* $\frac{n}{m}$ *ist; so giebt die ganze Zahl,*

welche zwischen den beiden Brüchen $(x+1) \cdot \frac{n}{m}$ *und* $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$ *sich befindet, an, wie vielmal diese Begebenheit auf das wahrscheinlichste in der gegebenen Menge von Versuchen sich ereignen wird; und wenn diese zwei Brüche sich auf ganze Zahlen bringen lassen, so zeigt eine jede dieser Zahlen, wie vielmal die bestimmte Begebenheit auf das wahrscheinlichste sich zutragen wird.*

Beweis. Wir haben gesehen (Kap. VII. §. 32.), dass, wenn $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit just r mal in x Versuchen sich ereignen wird, $\frac{x \ldots\ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} (m-n)^{x-r}$ ist; folglich ist der Werth von r in dem Falle, wo die veränderliche Funktion $\frac{x \ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$ ein Gröſstes oder Maximum ist, diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal, weder mehr noch weniger, diese Begebenheit auf das wahrscheinlichste in den angenommenen x Versuchen sich ereignen wird. Setzt man also in dieser veränderlichen Funktion nach und nach anstatt r alle ganze Zahlen von 0 bis x; so wird diese Funktion bei jeder Substitution immer gröſser werden, bis auf ein gewisses Glied, von da sie wieder abnehmen wird; und es ist offenbar, dass das Glied, wo diese Gröſse aus der Vermehrung in die Verminderung übergehen wird, zugleich dasjenige ist, wo seine unmittelbar darauf folgenden Werthe einander gleich sind, und wo folglich sein Werth der gröſst mögliche ist.

Dieses vorausgesetzt, substituire man in $\frac{x \ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$, für r die

Gröſsen $(x+1).\frac{n}{m}$ und $(x+1).\frac{n}{m}-1$; ſo wird daraus

$$P=\frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-(x+1).\frac{n}{m}+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x+1).\frac{n}{m}}\times$$

$$\frac{n^{(x+1).\frac{n}{m}}}{m^x}.(m-n)^{x-(x+1).\frac{n}{m}},$$

$$P^1=\frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-(x+1).\frac{n}{m}+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,((x+1).\frac{n}{m}-1)}\times$$

$$\frac{n^{(x+1).\frac{n}{m}-1}}{m^x}.(m-n)^{x-(x+1).\frac{n}{m}+1};$$

alſo iſt

$$P=P^1.\frac{x-(x+1).\frac{n}{m}+1}{(x+1).\frac{n}{m}}.\frac{n}{m-n},$$

aber $\frac{x-(x+1).\frac{n}{m}+1}{(x+1).\frac{n}{m}}.\frac{n}{m-n}=1$,

denn $(x-(x+1).\frac{n}{m}+1).n=(x+1).\frac{n}{m}.(m-n)$,

wie man ſich leicht davon überzeugen kann. Alſo $P^1=P$. Folglich iſt die Funktion

$$\frac{x \ldots\ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$$

ein Maximum, wenn $r = (x+1) \cdot \frac{n}{m}$ oder $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$, oder wenn diese beiden Werthe von r Brüche sind, so ist die zwischen ihnen liegende ganze Zahl das gesuchte Maximum. *W. Z. E.*

§. 3.

Zusatz. Wenn $x \cdot \frac{n}{m}$ eine ganze Zahl ist, so sind $x \cdot \frac{n}{m} + \frac{n}{m}$, und $x \cdot \frac{n}{m} + \frac{n}{m} - 1$, oder $(x+1) \cdot \frac{n}{m}$, und $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$ Brüche, und $x \cdot \frac{n}{m}$ ist die einzige ganze Zahl zwischen diesen zwei Brüchen; folglich zeigt sie, wie vielmal die bestimmte Begebenheit auf das wahrscheinlichste sich ereignen wird.

§. 4.

Anmerkung. Wenn man in der Grösse

$$\frac{x \ldots\ldots\ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$$

nach und nach für r alle ganze Zahlen von 0 bis x substituirt, und $x \cdot \frac{n}{m}$ eine ganze Zahl ist; so ist nicht nur der Werth jener Grösse durch die Substitution der Zahl $x \cdot \frac{n}{m}$ für r, ein Maximum geworden; sondern die Werthe, welche eben diese Grösse, durch die Substitution von $x \cdot \frac{n}{m} \pm 1$ anstatt r, erlangt, sind die nächst grössten, die Werthe, welche eben diese Grösse durch

die Subſtitution von $x \cdot \frac{n}{m} \pm 2$ für r, erhält, ſind die gröſsten nach dieſen letztern, und ſo weiter; dergeſtalt, daſs die Wahrſcheinlichkeit, die beſtimmte Begebenheit in x Verſuchen eine Anzahl mal, die ſich der von $x \cdot \frac{n}{m}$ nähert, zu erhalten, faſt der Gewiſsheit gleich gilt.

§. 5.

Um dieſe Anmerkung durch Beiſpiele ſinnlich zu machen, ſetze man

1) $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, und $x = 10$; ſo verwandelt ſich die Funktion $\frac{x \ldots . (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots . r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$ in

$$\frac{10 \ldots . (11-r)}{1 \cdot 2 \ldots . r} \cdot \frac{3^r}{5^{10}} \cdot 2^{10-r};$$

ſetzt man nun in dieſem letzten Ausdruk nach und nach anſtatt r, die Zahlen

r	
0	$204 + \frac{4}{5}$
1	3072
2	20736
3	82944
4	217728
5	$391910 + \frac{2}{5}$
6	489888
7	419904
8	236196
9	78732
10	$11809 + \frac{4}{5}$

(0 … 10); ſo bekömmt man (204+4/5 … 11809+4/5) : 1953125;

Demnach iſt die Wahrſcheinlichkeit die beſtimmte Begebenheit $x \cdot \frac{n}{m}$ oder $x \cdot \frac{n}{m} \pm 1$ oder $x \cdot \frac{n}{m} \pm 2$ mal

zu erhalten =

$$\left\{\begin{matrix}217728+ \\ 391910+\frac{2}{5}+ \\ 489888+ \\ 419904+ \\ 236196\end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1755626+\frac{2}{5}}{1953125};$$

welche Wahrscheinlichkeit wenig von der Gewissheit verschieden ist.

2) Man setze, dass $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, und $x = 9$, so verwandelt sich der allgemeine Ausdruk $\frac{x....(x-r+1)}{1.2....r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \times (m-n)^{x-r}$ in $\frac{9.....(10-r)}{1.2....r} \cdot \frac{3^r}{5^9} \cdot 2^{9-r}$, welcher sich, wenn man für r nach und nach die Zahlen

$$\left\{\begin{matrix}0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9\end{matrix}\right\} \text{ schreibt in } \left\{\begin{matrix}512 \\ 6912 \\ 41472 \\ 145152 \\ 326592 \\ 489888 \\ 489888 \\ 314928 \\ 118098 \\ 19683\end{matrix}\right\} : 1953125 \text{ verwandelt.}$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit die bestimmte Begebenheit eine Anzahl von malen zu erhalten, die von $x \cdot \frac{n}{m}$ nur um eine Grösse, kleiner als 2, unterschieden ist, =

$$\left\{\begin{matrix}326592+ \\ 489888+ \\ 489888+ \\ 314928\end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1621296}{1953125},$$

welche wenig von der Einheit oder Gewißheit abweichet.

3) Wenn $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$, und $x = 10$; so wird der allgemeine Ausdruk $\frac{10 \ldots\ldots\ldots (11 - r)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{2^r}{3^{10}}$;

setzt man in demselben für r

$$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\right\}; \text{ so erhält man } \left\{\begin{matrix} 1 \\ 20 \\ 180 \\ 960 \\ 3360 \\ 8064 \\ 13440 \\ 15360 \\ 11520 \\ 5120 \\ 1024 \end{matrix}\right\} : 59049;$$

also ist die Wahrscheinlichkeit die bestimmte Begebenheit in zehn Versuchen eine Zahl von malen, die nur um 1 von $x \cdot \frac{n}{m}$ verschieden ist, zu erhalten,

$$\left[\begin{matrix} 13440 + \\ 15360 + \\ 11520 \end{matrix}\right] : 59049 = \frac{40320}{59049},$$

welche wenig von der Einheit verschieden ist: und die Wahrscheinlichkeit diese Begebenheit eine Zahl von malen zu erhalten, die nur um 2 von $x \cdot \frac{n}{m}$ verschieden ist, $= \left[\begin{matrix} 8064 + \\ 40320 + \\ 5120 \end{matrix}\right] : 59049 = \frac{53504}{59049}$, welche noch weniger von der Einheit unterschieden ist.

4) Für $\frac{n}{m} = \frac{1}{1000}$, und $x = 2$; iſt die Wahrſcheinlichkeit, die beſtimmte Begebenheit in den beiden Verſuchen $\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right.$ mal hervorzubringen, $= \left[\begin{matrix} 998001 \\ 1998 \\ 1 \end{matrix}\right] : 1000000$; hieraus ſiehet man, daſs die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich die Begebenheit in den beiden Verſuchen gar nicht ereignen wird, $= \frac{998001}{1000000}$ iſt, welche der Gewiſsheit ſehr nahe kommt; weil in dieſem Falle 0 die ganze Zahl zwiſchen den Brüchen $(x+1) \cdot \frac{n}{m}$, $\frac{3}{1000}$, und $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$, $- \frac{997}{1000}$ iſt.

§. 6.

Zusatz 1. Wenn die Handlung, Bewegung, oder der Zuſtand, von welchen eine bezeichnete Begebenheit abhängt, x mal wiederholet wird; ſo iſt es beinahe gewiſs, daſs dieſe Begebenheit ſich eine Anzahl von malen r ereignen wird, die ſo beſchaffen iſt, daſs der Bruch $\frac{r}{x}$ der eigentlichen Wahrſcheinlichkeit $\frac{n}{m}$ eben dieſer Begebenheit ſehr nahe kommen wird: denn wenn man $\frac{r}{x} = \frac{n}{m}$ ſetzt, ſo folgt daraus $r = x \cdot \frac{n}{m}$.

§. 7.

Zusatz 2. Wenn man nicht weiſs, und keine Mittel ausfindig machen kann, die Wahrſcheinlichkeit einer beſtimmten Begebenheit mit Genauigkeit auszumachen, ſo wird man, zu Folge der oben feſtgeſetzten Principien, aus Erfahrungen oder Beobachtungen dieſe Wahrſcheinlichkeit durch die Näherung beinahe richtig

erhal-

erhalten können. Zu dieser Absicht wiederhole oder beobachte man, so vielmal als es nur möglich ist oder bequem gehen will, die Handlung, Bewegung, oder den Zustand, wovon diese Begebenheit abhänget: ist alsdann x die Anzahl dieser Erfahrungen oder Beobachtungen, und giebt r an, wie vielmal diese Begebenheit geschehen ist; so wird man den Bruch $\frac{r}{x}$ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit annehmen können.

Zum Beispiel. Wenn Peter und Paul 300 Parthien Schach mit einander gespielt haben, und Peter 136 davon gewonnen hat; so wird man $\frac{136}{300}$ oder $\frac{34}{75}$ für die Wahrscheinlichkeit annehmen können, dass Peter die erste Parthie Schach, welche er mit Paul spielen wird, gewinnen werde; und man kann ziemlich versichert sein, dass diese Wahrscheinlichkeit sich nicht beträchtlich von der wahren entfernen wird.

§. 8.

Die Anwendung dieser Methode erfodert zwei wesentliche Vorsichtsregeln, die eine betrift die Zahl, die andere die Beschaffenheit der Erfahrungen oder Beobachtungen, woraus man die verlangte Wahrscheinlichkeit herleiten will.

§. 9.

1) Ist die Anzahl dieser Erfahrungen sehr klein, und hat keine derselben die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit man suchet, gegeben; so ist es nicht nur eigentlich unerlaubt daraus zu schliessen, dass diese Begebenheit unmöglich sei; sondern man ist auch nicht einmal versichert, dass sie nicht einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit habe. Wenn im Gegentheil diese Begebenheit in allen Versuchen erfolgt ist; so fehlt so viel, dass man sollte nach der Strenge daraus schliessen können, die Be-

gebenheit werde nothwendig sich ereignen, dass man vielmehr nicht einmal versichert ist, ob ihre Wahrscheinlichkeit nur sehr gross sei.

2) Ist aber die Menge der Erfahrungen sehr gross, so wird man mit vielem Schein der Wahrheit hieraus schliessen können; im ersten Falle, dass die Begebenheit, von welcher die Rede ist, obgleich nicht schlechterdings unmöglich, doch wenigstens sehr wenig wahrscheinlich ist; und in dem zweiten Falle, dass diese Begebenheit, wo nicht im strengsten Verstande gewiss, doch wenigstens die Wahrscheinlichkeit derselben sehr gross ist.

§. 10.

Es darf keinen uns bekannten und merklichen Unterschied unter den verschiedenen Bewegungen, Vorfällen oder Zuständen die verglichen werden, und demjenigen dieser genannten Dinge geben, von welchen die Begebenheit abhängt, wovon man die Wahrscheinlichkeit sucht, die uns berechtigt einen Erfolg eher als einen andern zu erwarten.

Zum Beispiel. Wenn man durch die Methode, auf welche es hier ankommt, die Wahrscheinlichkeit suchen will, mit zwei gemeinen Spielwürfeln, die man in der Hand hat, sechs und sechs zu werfen; so mache man die diesfalls nöthigen Versuche entweder mit eben diesen oder mit andern Würfeln, die von diesen keine uns an ihnen bewusste Verschiedenheit haben; dergleichen solche wären, die dazu gemacht sind, dass man mit ihnen eine Seite öfter als eine andere von der nämlichen Wahrscheinlichkeit werfen muss. Desgleichen, wenn von 3000 achtzigjährigen mir bekannt gewesenen Personen nur 60 hundert Jahr alt geworden sind; so lässt sich, nach der vor uns habenden Methode der Bruch $\frac{60}{3000}$ oder $\frac{1}{50}$ für die Wahrscheinlichkeit annehmen, dass eine unbekannte achtzigjährige Person 100 Jahr alt

werden wird. Sucht man aber die Wahrscheinlichkeit, daſs Peter, der achtzig Jahr alt iſt, hundert Jahr leben wird, und weiſs überdies, daſs er ſchwach, und von einer gefährlichen Krankheit befallen iſt; ſo muſs man aus ſeinen Beobachtungen diejenigen, welche über geſunde und ſtarke achtzigjährige Greiſe gemacht worden ſind, herauswerfen, und ſeine Rechnung blos auf diejenigen einſchränken, die über Alte von ebendemſelben Alter und ohngefähr von den bekannten Geſundheitsumſtänden des Peter angeſtellt worden ſind; hiedurch wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter hundert Jahr leben wird, vielleicht o oder beinahe o werden.

§. 11.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt, daſs die gegenwärtige Methode um ſo mehr Hofnung giebt, der wahren Wahrſcheinlichkeit, die man zu wiſſen verlangt, nahe zu kommen, je mehr die Beobachtungen oder Erfahrungen, aus welchen man ſie ableitet, vervielfacht; und je ähnlicher die Vorfälle, Bewegungen oder Zuſtände von Dingen, über die ſie gemacht worden, demjenigen dieſer genannten Dinge ſind, wovon die Begebenheit abhängt, deren Wahrſcheinlichkeit man ſucht.

§. 12.

Wenn während den Verſuchen, wodurch man die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit herleiten will, bemerkt worden wäre, daſs die Zahl des Wiederkommens dieſer Begebenheit fortſchreitend zu- oder abgenommen hätte; ſo müſste man bei dieſer ſucceſſiven Veränderung eine Urſache vorausſetzen, auf welche ſo viel als möglich in der Findung der Wahrſcheinlichkeit Rükſicht zu nehmen wäre; welches ſich denn ohngefähr auf folgende Weiſe würde thun laſſen: Man theile die gemachten Erfahrungen in mehrere auf einander folgende Epochen, deren jede dieſelbe Zahl von Verſuchen enthält; ſetze voraus, daſs die Urſache der beobachteten

Veränderung, nicht in dem Laufe der Epochen, sondern nur in dem Uebergange einer Epoche zur andern ihre Wirkung äusſere; mache nach der gegenwärtigen Methode die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit für jede Epoche; ſo werden dieſe Wahrſcheinlichkeiten unter ſich eine Reihe von Brüchen ausmachen, die einerlei Nenner haben, und deren Zähler eine Reihe von Zahlen ſein werden, die entweder regulair oder irregulair ſein wird. Um dieſe Reihe, wenn ſie irregulair iſt, in eine regulaire zu verwandeln, ſo mache man damit die nöthigen, aber geringſt möglichen Veränderungen. Iſt nun auf ſolche Weiſe dieſe Reihe regulair gemacht worden, ſo vermehre man ſie um ein Glied; nehme dieſes Glied zum Zähler, und den gemeinſchaftlichen Nenner zum Nenner an. So wird der auf dieſe Weiſe erhaltene Bruch mit einiger Zuverſicht, daſs man ſich der Sache auf eine der Vernunft gemäſse Art genähert habe, für die geſuchte Wahrſcheinlichkeit angenommen werden können.

Zum Beiſpiel. Peter hat mit Paul 408 Parthien Triktrak geſpielt, während welchen beide ungleich vollkommen im Spiele waren; nun hat Peter in den 68 erſten Parthien 12; in den 68 folgenden, 15; in den 68 folgenden, 19; in den 68 folgenden, 26; in den 68 folgenden, 24; und endlich in den 68 letzten Parthien, 31 gewonnen. So war die Wahrſcheinlichkeit des Peter zu gewinnen, in der erſten Epoche $\frac{12}{68}$; in der zweiten $\frac{15}{68}$; in der dritten $\frac{19}{68}$; in der vierten $\frac{26}{68}$; in der fünften $\frac{24}{68}$; und endlich in der ſechſten $\frac{31}{68}$.

In der Reihe der Zähler: 12, 15, 19, 26, 24, 31, ſubſtituire man die Glieder 24 und 28, anſtatt 26 und 24, ſo wird die Reihe: 12, 15, 19, 24, 28, 31, oder regu-

lair, wo die Unterſchiede der Glieder unter ſich die Reihe 3, 4, 5, 4, 3 formiren. Nun nehme man für das 7te, 8te, 9te, 10te Glied u. ſ. f. die Zahlen 33, 34, 34, 33, u. ſ. f. ſo erhält man eine ordentliche Reihe, in welcher die Differenzen der Glieder die Reihe 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, − 1, u. ſ. f. ſind, und man kann $\frac{33}{68}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{34}{68}$ für die Wahrſcheinlichkeiten annehmen, daſs Peter in der ſiebenten, achten und neunten Epoche gewinnen werde.

§. 13.

Der Weg der Erfahrungen und Beobachtungen kann die Wahrſcheinlichkeiten der Begebenheiten aller Arten, ſelbſt derjenigen zu finden, gebraucht werden, deren Wahrſcheinlichkeit ſich eigentlich a priori berechnen lieſse. Ohne Zweifel wird es ſich ſehr oft ereignen, daſs die ſolchergeſtalt gefundene Wahrſcheinlichkeit um viel von der eigentlichen Wahrſcheinlichkeit, die durch die Analyſe erhalten wird, verſchieden iſt. Allein man muſs in Erwägung ziehen, daſs in den Rechnungen die Werkzeuge, womit man eine Begebenheit hervorbringt, vollkommen, das iſt, gleich fähig vorausgeſetzt werden, alle die Fälle, welche man durch Zählung herausbringt, hervorzubringen; welches in der Ausübung nicht ſtatt finden kann, wo die Unvollkommenheit der Werkzeuge gewöhnlicherweiſe viel Einfluſs auf die Begebenheit hat. Da alſo bei der vor uns habenden Methode die Unvollkommenheiten der Inſtrumente, womit die Begebenheit hervorgebracht wird, wirklich Einfluſs auf die bemerkten Reſultate gehabt haben; ſo ſchätzen die Beobachtungen, aus welchen man die Wahrſcheinlichkeiten herleitet, dieſe Unvollkommenheiten des Calculs auf eine der Vernunft gemäſse Art: dergeſtalt, daſs es nichts unmögliches iſt, und man zuweilen mit Grund vermuthen kann, daſs die auf dem Wege der Erfahrungen erhaltene Wahr-

scheinlichkeit, der gesuchten mehr, als diejenige sich nähert, welche man durch eine strenge Analyse gefunden.

Damit dieses durch ein Beispiel sinnlich werde, setze man, dass zwei gemeine Spielwürfel vollkommen kubisch, und in dem ganzen Umfange ihrer Solidität von einer gleich dichten Materie sind; werden diese beiden Würfel auf einen horizontalen Tisch geworfen, so ist es in der Theorie gewiss, dass es 36 gleich mögliche Resultate giebt. Allein, wenn sich bei diesen Würfeln einige physische Unregelmäfsigkeiten befinden; zum Beispiel, wenn einer von ihnen von einer dichtern und folglich schwerern Materie gegen eine Seite als gegen die fünf übrigen ist; so wird dieser Würfel (wenn sonst alles übrige gleich ist) öfter auf diese Seite als auf die übrigen fallen; und folglich die dieser entgegengesetzte Seite öfter als irgend eine von den fünf andern geben. Die Methode a priori wird also alsdann unsicher, und man kann ihr die Methode der Erfahrungen vorziehen.

In dieser Absicht werfe man eine hinreichende Anzahl von malen diese beiden Würfel auf einen Tisch, zum Beispiel 144 mal; und wenn in diesen 144 Versuchen der Pasch von zwei Sechsen zwölfmal, ferner 5 und 4 nur sechsmal fällt; so nimmt man $\frac{12}{144}$ oder $\frac{1}{12}$ für die Wahrscheinlichkeit mit diesen zwei Würfeln einen Pasch von zwei Sechsen zu werfen, und $\frac{6}{144}$ oder $\frac{1}{24}$ für die Wahrscheinlichkeit 5 und 4 hervorzubringen; und man wird sich vielleicht mehr dem wahren Werthe dieser Wahrscheinlichkeiten nähern, als wenn man sie $\frac{1}{36}$ und $\frac{1}{18}$ annähme; weil sehr zu vermuthen ist, dass in einer grossen Anzahl von Versuchen das öftere Wiederkommen einer jeden möglichen Begebenheit, ohngefähr

der wirklichen Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit proportional iſt.

Nach dieſer Methode die Wahrſcheinlichkeiten anzugeben, begiebt es ſich ſo oft, daſs unglükliche Spieler Würfel, Karten, Spielbecher, Plätze wechſeln, und mit gutem Erfolg verſchiedene andere Mittel gebrauchen, die Werkzeuge des Glüks zu verändern, da ihnen die Erfahrung den Nachtheil kennen gelehrt hat, der für ſie aus der Unvollkommenheit dieſer Werkzeuge entſpringet.

§. 14.

Man kann durch den Weg der Erfahrungen die ſich nähernde Wahrſcheinlichkeit verſchiedener Ereigniſſe finden, welche ſtatt finden können, nicht nur bei den eigentlich ſo genannten Hazardſpielen, ſondern auch bei den vermiſchten Spielen, wo Glük und Geſchiklichkeit im Spielen gemeinſchaftlich mehr oder weniger zur Beſtimmung der Ereigniſs beitragen können; dergleichen das Triktrak, Billard, Ballſpiel und die meiſten Karten- ſogenannten Geſellſchaftsſpiele ſind; und endlich bei denjenigen Spielen, wo die Geſchiklichkeit allein entſcheidet, wie Schach und andere.

§. 15.

Man kann auch durch dieſe Methode, mittelſt einer hinreichenden Zahl gut gewählter Erfahrungen oder Beobachtungen, die Wahrſcheinlichkeit verſchiedener Naturbegebenheiten finden, davon die Gelegenheitsurſachen unbekannt ſind, und welche keiner bekannten periodiſchen Wiederkehr, wodurch die Ereignung derſelben gewiſs wird, unterworfen ſind.

§. 16.

Beispiele. Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs eine Perſon, die gegenwärtig im nten Jahre ihres Alters iſt, $n+p$ Jahre alt werden wird; nehme man aus den Sterberegiſtern der Stadt, und wenn es möglich

iſt, des Landes, worin ſie wohnet, die Anzahl der Verſtorbenen nach einem Alter von n Jahren, und mache dieſe Zahl zum Nenner der geſuchten Wahrſcheinlichkeit; hierauf nehme man die Anzahl derjenigen Perſonen, welche nach einem Alter von $n+p$ Jahren geſtorben ſind, und mache dieſe Zahl zum Zähler dieſer Wahrſcheinlichkeit.

Hiedurch kann man in einem Lande, wo man die Sterberegiſter von einer ziemlich langen Zeit her, und mit hinlänglicher Genauigkeit verſertigt, aufzuweiſen hat, allezeit die Wahrſcheinlichkeit finden, daſs eine Perſon, deren Alter bekannt iſt, 1, 2, 3, oder eine gröſsere Anzahl von Jahren darüber leben werde; und auf welche Erreichung von Jahren dieſer Perſon man bei gleichen Miſen rechtmäſsig wetten könne. Nach einer Folge ähnlicher Beobachtungen wird man für einen jeden Ort Wahrſcheinlichkeitstafeln des menſchlichen Lebens für jedes Alter verfertigen können, dergleichen man in den Werken des Herrn von Büffon antrift. *)

Eben ſo iſt keinem Zweifel unterworfen, daſs man nicht durch eine genugſam lange Folge von Witterungsbeobachtungen, für jedes Land und jede Jahreszeit, die Wahrſcheinlichkeiten der verſchiedenen Temperaturen der Luft, die man vermuthen darf, finden, und vielleicht endlich einförmige Geſetze und periodiſches Wiederkommen bei dieſen Abwechſelungen, nach einer groſsen Anzahl von Jahren, entdeken ſollte, wodurch man die Ordnung von dieſen Revolutionen feſtſetzen, und dieſelben mit Gewiſsheit vorausſehen könnte.

§. 17.

Man kann ferner durch dieſe Methode der Beobachtungen und Erfahrungen die Wahrſcheinlichkeit der mo-

*) Von den deutſchen Werken gehören hieher: *Süſsmilchs* göttliche Ordnung; *Florencourt* Abhandlungen aus der juriſtiſchen und politiſchen Rechenkunſt; und vorzüglich *Tetens* Einleitung zur Berechnung der Leibrenten u. ſ. w. *Anm. d. Ueberſ.*

ralischen Wirkungen, welche aus der Vergleichung von Willenshandlungen, und folglich von Urtheilen und Neigungen der Menschen bei gegebenen Umständen entspringen, ohngefähr bestimmen, es möge nun das Resultat aus den bekannten Eigenschaften eines einzelnen Menschen, oder den bekannten Eigenschaften mehrerer über eine Sache vereinigter oder getheilter Menschen, wahrscheinlich anzugeben verlangt werden.

§. 18.

Wollte man, zum Beispiel, die Wahrscheinlichkeit eines von jemanden bei einem gegebenen Umstande abgelegten Zeugnisses finden; so würde man alle bestätigten Zeugnisse, welche von eben dieser Person, oder von andern, die ohngefähr ebendasselbe Interesse und dieselben Einsichten hatten, und ohngefähr in ähnlichen Umständen abgelegt worden sind, mit einander vergleichen; die Zahl der verglichenen Zeugnisse würde der Nenner, und die Zahl der als wahr erkannten Zeugnisse der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein.

§. 19.

Und da sich durch diese Methode, weder die Wahrscheinlichkeit, noch die Gewissheit, mit geometrischer Genauigkeit, sondern blos mit der starken Hofnung, dass man sich ihnen auf eine der Vernunft gemässe Weise genähert habe, bestimmen lassen; so kann man sie, um sie von der geometrischen Wahrscheinlichkeit und Gewissheit zu unterscheiden, *physische* nennen, wenn die Frage von natürlichen Begebenheiten ist, bei deren Bestimmung der Wille des Menschen auf keine Weise Antheil hat; und *moralische*, wenn die Frage von Begebenheiten ist, welche aus Handlungen des menschlichen Willens entspringen.

§. 20.

Endlich können die Beobachtungen und Erfahrungen dienen, die Wahrscheinlichkeit von Behauptungen

oder allgemeinen und besondern Sätzen, so wie von Meinungen und Systemen zu finden, durch die Vergleichung der Thatsachen, welche sie zu bekräftigen, mit denjenigen, welche ihnen zu widersprechen scheinen. Und man darf die Hofnung nicht aufgeben, dass beim Mangel von Gewissheiten, welche vielleicht nie das Antheil der Menschen sein werden, eine hinreichende Zahl von Erfahrungen und Beobachtungen, verbunden mit dem scharfsinnigen Gebrauche, den das Genie davon zu machen gewust, nicht dereinst den grössten Theil der zweifelhaften Gegenstände der menschlichen Kenntnisse, einer allgemeinen Kritik und einzigen Art von Prüfung unterwerfen sollte, die für jede Meinung einen gleichförmigen, dem Grade der ihr beigelegten Wahrscheinlichkeit proportionirten Grad des Beifalls festsetzte.

Kapitel XII.

Von dem Einfluss der Zeugnisse auf die Wahrscheinlichkeiten.

§. 1.

Es giebt eine dritte Art die Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten oder Sätze zu finden, welche im gemeinen Leben sehr im Gebrauch ist, das ist, sie aus dem Werthe der Zeugnisse herzuleiten, durch welche diese Begebenheiten bejaht oder verneint werden. Es richtet sich aber die Stärke der Zeugnisse nicht blos nach der Menge der Zeugen, sondern auch nach der Rechtschaffenheit und den Einsichten des Zeugen: dergestalt, dass die Grösse oder der Werth dieser moralischen Eigenschaften gleich mit in der Rechnung ausgedrükt werden muss, wenn man mit einiger Genauigkeit den Grad der Wahrscheinlichkeit angeben will, welcher aus einer Zu-

ſammenkunft von Zeugniſſen entſpringt. Wir wollen verſuchen, kürzlich einige von denjenigen Grundſätzen anzuzeigen, die uns geſchikt geſchienen haben, die Grundlage dieſer Theorie ausmachen zu können, welche wir nicht gegen alle Einwendungen zu vertheidigen auf uns nehmen möchten, und deren Anwendung oft mislich ſcheinen kann.

§. 2.

Die Erfahrung kann allein uns in den Stand ſetzen, die Stärke der Einſichten und der Rechtſchaffenheit eines Zeugen, der eine Thatſache bejaht oder verneint, gehörig zu würdigen. Dem zu Folge kann die Wahrſcheinlichkeit der Wahrhaftigkeit eines bei einem gegebenen Umſtande abgelegten Zeugniſſes nicht leicht anders hergeleitet werden, als aus der angeſtellten Vergleichung einer groſsen Zahl von Zeugniſſen, die von ebendemſelben Zeugen, oder andern von ohngefähr ebendenſelben Leidenſchaften, Vorurtheilen, Gewohnheiten, Intereſſe und Einſichten, und bei ohngefähr ähnlichen Umſtänden gegeben worden ſind, wie wir bereits im vorhergehenden (Kap. XI. §. 18.) erinnert haben. Geſetzt alſo, daſs unter einer Menge a dieſer Beobachtungen, das Zeugniſs b mal als wahr, und in allen übrigen als falſch erkannt worden iſt; ſo läſst ſich durch $\frac{b}{a}$ der Werth des Zeugniſſes, das heiſst, die Wahrſcheinlichkeit, daſs das Zeugniſs wahr iſt, ausdrüken.

§. 3.

Man nennet *Gewicht* oder *Werth*, oder *Stärke* eines Zeugniſſes, die Gröſse ſeines Einfluſſes in die Wahrſcheinlichkeit der That, welche es behauptet; eben ſo iſt das Gewicht mehrerer vereinigter Zeugniſſe der Einfluſs dieſer Vereinigung in die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, welche durch alle dieſe Zeugniſſe behauptet wird.

§. 4.

Das Gewicht eines Zeugnisses, welches eine Thatsache bejahet, ist der Wahrscheinlichkeit dieses Zeugnisses proportional, und kann allezeit durch diese Wahrscheinlichkeit ausgedrükt werden. Wenn zum Beispiel der Bruch $\frac{b}{a}$ die Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses ist, so wird $\frac{b}{a}$ das Gewicht ebendesselben Zeugnisses ausdrüken.

§. 5.

Ein Zeugniss heisst *unverwerflich*, wenn das Gewicht desselben das grösst mögliche ist; das heisst, dessen Wahrscheinlichkeit 1 ist. Man kann auch sagen, dass dasjenige Zeugniss unverwerflich sei, das am fähigsten ist, die Begebenheit, welche es behauptet, gewiss zu machen, vorausgesetzt dass diese Begebenheit übrigens nicht für unmöglich erkannt, und diesem Zeugnisse durch kein anderes Zeugniss widersprochen worden ist.

§. 6.

Wenn zwei Zeugnisse behaupten, dass eine gewisse That geschehen sei, so ist das Gewicht, welches aus diesen zwei vereinigten Zeugnissen entspringt, so gross als das Gewicht des ersten Zeugnisses, wenn man noch einen dem Gewichte des zweiten proportionalen Theil desjenigen, was dem ersten zu einem unverwerflichen Zeugnisse noch fehlet, hinzu addirt; oder das zweite Zeugniss vergrössert in dem Falle das Gewicht des ersten um einen solchen Theil seiner Ergänzung zur Einheit, der durch das Gewicht des zweiten Zeugnisses ausgedrükt wird. Wenn also $\frac{b}{a}$ das Gewicht des ersten Zeugnisses, und $\frac{d}{c}$ das Gewicht des zweiten ist;

ſo wird das Gewicht der beiden vereinigten Zeugniſſe ſein $\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right).\frac{d}{c}$ oder $\frac{d}{c}+\left(1-\frac{d}{c}\right).\frac{b}{a}$.

§. 7.

Wenn drei Zeugniſſe eine That bejahen, ſo wird das Gewicht der zwei übrigen vereinigten Zeugniſſe um denjenigen Theil ſeiner Ergänzung zur Einheit durch das Gewicht des dritten noch hinzugekommenen Zeugniſſes vergröſsert, der durch das Gewicht des dritten Zeugniſſes angedeutet wird. Sind z. B. die Gewichte der drei Zeugniſſe $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, ſo iſt das Gewicht der drei vereinigten Zeugniſſe

$$\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right).\frac{d}{c}+\left(1-\frac{b}{a}-\left(1-\frac{b}{a}\right).\frac{d}{c}\right).\frac{g}{f};$$

und ſo weiter. Ueberhaupt:

Ein neu hinzugekommenes Zeugniſs, welches eine Thatſache behauptet, vergröſsert das Gewicht aller übrigen vereinigten Zeugniſſe um einen ſolchen Theil ſeiner Ergänzung zur Einheit, der durch das Gewicht des neuen Zeugniſſes ausgedrükt wird.

Wenn alſo A das Gewicht der übrigen vereinigten Zeugniſſe, und $\frac{q}{p}$ das Gewicht des neuen hinzugekommenen Zeugniſſes bedeutet; ſo wird das Gewicht aller Zeugniſſe zuſammengenommen, $A+(1-A).\frac{q}{p}$ ſein.

§. 8.

Verneinen mehrere Zeugniſſe eine Thatſache, ſo wächſt auf eben die Art, durch jedes neu hinzugekommene Zeugniſs, das Gewicht der übrigen in der Wahr-

ſcheinlichkeit, daſs dieſe Begebenheit nicht exiſtirt, vereinigten Zeugniſſe um denjenigen Theil von dem, was dieſem Gewichte zur Einheit mangelt, der durch das Gewicht des neuen Zeugniſſes ausgedrükt wird. So iſt, wenn B das Gewicht aller übrigen verneinenden Zeugniſſe, und $\frac{y}{x}$ das Gewicht des zuletzt hinzugekommenen Zeugniſſes anzeigt; das Gewicht aller in der Wahrſcheinlichkeit, daſs die Begebenheit nicht exiſtiret, vereinigter Zeugniſſe, $B + (1 - B) . \frac{y}{x}$.

§. 9.

Wenn eins von den bejahenden Zeugniſſen unverwerflich iſt, ſo können die übrigen ſeinem Gewichte nichts hinzuſetzen, da es das gröſste Gewicht iſt, das eine Menge vereinigter Zeugniſſe haben kann; eben ſo, wenn eins der verneinenden Zeugniſſe unverwerflich iſt, können die übrigen verneinenden Zeugniſſe ſeinem Gewichte, in der Wahrſcheinlichkeit, daſs die verneinte Sache nicht exiſtire, nichts hinzuſetzen, weil dieſes Gewicht das gröſst mögliche iſt.

§. 10.

Aus eben dem Grunde wird, wenn eins von den bejahenden Zeugniſſen von keinem Gewichte; das heiſst, wenn ſeine Wahrſcheinlichkeit o iſt; daſſelbe nichts zu dem Gewichte der affirmirenden Zeugniſſe; und eins von den verneinenden Zeugniſſen, deſſen Gewicht o iſt, nichts dem Gewichte der übrigen verneinenden Zeugniſſe hinzufügen.

§. 11.

Wenn mehrere Zeugniſſe eine Thatſache bejahen, und andere Zeugniſſe ebendieſelbe verneinen, ſo iſt das aus der Vereinigung dieſer widerſprechenden Zeugniſſe

entſpringende Gewicht, ſo groſs als der Ueberſchuſs des Gewichts der bejahenden Zeugniſſe über das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe; oder der Ueberſchuſs des Gewichts der verneinenden Zeugniſſe über das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe. Heiſst alſo A das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe, B das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe, ſo iſt das Gewicht, das aus allen dieſen auf beiden Seiten vorhandenen Zeugniſſen entſpringet, $A-B$, oder $B-A$, oder o, je nachdem $A>B$, oder $A<B$, oder $A=B$.

§. 12.

Wenn das Gewicht der Zeugniſſe, welche eine Thatſache bejahen, gröſser iſt als das Gewicht der Zeugniſſe, welche ebendieſelbe leugnen; ſo vergröſsert der Ueberſchuſs des erſten Gewichts über das zweite, oder welches einerlei iſt, das Gewicht, welches aus allen Zeugniſſen für und wider die Sache entſpringet, die Wahrſcheinlichkeit der Exiſtenz der Sache. Hingegen, wenn das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe überſteiget; ſo vermehret das Gewicht, welches aus den Zeugniſſen für und wider entſpringet, die Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der bezeugten Begebenheit. Endlich, wenn das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe dem Gewichte der verneinenden Zeugniſſe gleich iſt; ſo iſt die Thatſache auf ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit, das iſt, auf diejenige gebracht, welche ihr unabhängig von den Zeugniſſen beigelegt werden kann.

§. 13.

Wenn eine bezeugte Begebenheit einen Grad von Wahrſcheinlichkeit hat, der ihr durch bloſse Schlüſſe, oder durch die Erfahrung, unabhängig von Zeugniſſen, beigelegt worden; ſo vergröſsern die abgelegten Zeugniſſe für oder wider dieſe Begebenheit, ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit

um denjenigen Theil von dem, was ihr zur Gewiſsheit noch mangelt, welcher durch den Ueberſchuſs des Gewichts der bejahenden Zeugniſſe über das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe ausgedrükt wird.

§. 14.

Lehrsatz. I. *Wenn mehrere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten* $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, $\frac{i}{h}$, *u. ſ. f. ſind, eine Sache behaupten; ſo iſt das Gewicht dieſer vereinigten Zeugniſſe ſo groſs als die Einheit weniger das Produkt der Gröſsen* $1-\frac{b}{a}$, $1-\frac{d}{c}$, $1-\frac{g}{f}$, $1-\frac{i}{h}$, *u. ſ. f. das iſt,* $1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right].\left[1-\frac{g}{f}\right].\left[1-\frac{i}{h}\right]\ldots\ldots$

Beweis. Das Gewicht des erſten Zeugniſſes iſt $\frac{b}{a}$ (§. 4.) $= 1-\left[1-\frac{b}{a}\right]$.

Das Gewicht der beiden erſten Zeugniſſe iſt $\frac{b}{a}+\left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c}$ (§. 6.) $= 1-\left[1-\frac{b}{a}\right]+\left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c} = 1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right]$.

Das Gewicht der drei erſten Zeugniſſe iſt $\frac{b}{a}+\left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c}+\left[1-\frac{b}{a}-\left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c}\right].\frac{g}{f}$ (§. 7.)

$$=1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right]+\left[1-\frac{b}{a}\right]\left[1-\frac{d}{c}\right]\frac{g}{f}$$

$$=1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right].\left[1-\frac{g}{f}\right];$$ und ſo weiter. Folglich, u. ſ. w. *W. Z. E.*

§. 15.

§. 15.

Zusatz 1. Wenn mehrere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$ u ſ. f. ſind, eine Begebenheit verneinen; ſo iſt das Gewicht aller dieſer Zeugniſſe zuſammen, wodurch dieſe Begebenheit verneint wird, $1-\left[1-\frac{q}{p}\right].\left[1-\frac{s}{r}\right].\left[1-\frac{u}{t}\right]\ldots\ldots$

§. 16.

Zusatz 2. Wenn mehrere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, u. ſ. f. ſind, eine Thatſache bejahen, und mehrere andere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, u. ſ. f. ſind, ebendieſelbe Sache verneinen; ſo wird, wenn A das Produkt $\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right].\left[1-\frac{g}{f}\right]\ldots\ldots\ldots$; und B, das Produkt $\left[1-\frac{q}{p}\right].\left[1-\frac{s}{r}\right].\left[1-\frac{u}{t}\right]\ldots\ldots$ bedeutet, das Gewicht dieſer einander widerſprechenden Zeugniſſe, $1-A-1+B$, oder $B-A$ ſein, wenn $B>A$; und dieſes Gewicht wird die eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit vermehren. Hingegen wird das Gewicht dieſer Zeugniſſe $1-B-1+A$, oder $A-B$ ſein, wenn $B<A$ iſt, und dieſes Gewicht wird die Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der Begebenheit vergröſsern. Endlich wenn $A=B$, ſo wird das Gewicht der Zeugniſſe Null ſein, und die eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit weder vermehren noch vermindern können. (§. 11.).

§. 17.

Anmerkung. Aus den in den drei vorhergehenden Sätzen gefundenen Formeln erſiehet man: 1) daſs der Bruch, welcher durch $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ vorgeſtellet wird, um ſo viel kleiner, und folglich das Gewicht der $\left\{\begin{matrix}\text{bejahenden}\\\text{verneinenden}\end{matrix}\right.$ Zeugniſſe um ſo viel gröſser wird, je gröſser die Wahrſcheinlichkeit oder das Gewicht der einzelnen $\left\{\begin{matrix}\text{bejahenden}\\\text{verneinenden}\end{matrix}\right.$ Zeugniſſe, und je gröſser ihre Anzahl iſt; 2) daſs, wenn irgend eins dieſer Zeugniſſe von keinem Werthe, das heiſst, ſein Gewicht o iſt, daſſelbe dem Gewichte der übrigen weder etwas hinzuſetzt, noch etwas benimmt; 3) daſs, wenn unter den bejahenden Zeugniſſen, eins oder mehrere unverwerfliche vorhanden ſind, $A = 0$ iſt, und das Gewicht der Zeugniſſe in der Wahrſcheinlichkeit der Exiſtenz der Begebenheit B ſein wird; 4) daſs, wenn unter den verneinenden Zeugniſſen eins oder mehrere unverwerflich ſind, $B = 0$, und das Gewicht der Zeugniſſe in der Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der Begebenheit A iſt. 5) Endlich, daſs, wenn eins oder mehrere von den bejahenden, und ebenfalls eins oder mehrere von den verneinenden Zeugniſſen unverwerflich ſind; $A = B = 0$ iſt; und die bezeugte Begebenheit auf ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit, das iſt, auf diejenige gebracht iſt, welche ihr unabhängig von Zeugniſſen beigelegt werden kann.

§. 18.

Wenn der Grad der Wahrſcheinlichkeit einer beſtimmten Begebenheit a priori gefunden, oder aus Erfahrungen, und unabhängig von Zeugniſſen hergeleitet worden iſt; ſo vergröſsert die Menge der Zeugniſſe,

welche diese Begebenheit bejahen, oder der Ueberschufs des Gewichts derjenigen Zeugnisse, welche sie bejahen, über das Gewicht derjenigen, welche dagegen sind, ihre eigenthümliche Wahrscheinlichkeit um einen Theil von dem, was ihr zur Einheit noch mangelt; und dieser Theil ist nicht blos dem Gewichte der Zeugnisse proportional, wie schon (§. 13.) erinnert worden ist, sondern auch dem Grade der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit. Dieser Satz beruhet auf der Ungleichheit des Beifalls, den wir natürlicherweise einem und ebendemselben Zeugen geben, welcher allezeit der Wahrscheinlichkeit, die wir selbst der bezeugten That beigelegt haben, proportional ist. Man würde auch in der That weit mehr jemanden Glauben beimessen, wenn er sagte, dafs er in 30 Würfen mit zwei Spielwürfeln nur ein einzigesmal einen Pasch von zwei Sechsen geworfen, als wenn ebenderselbe behauptete, dafs er in 100 Würfen mit diesen beiden Würfeln bei jedem Wurfe einen solchen Pasch hervorgebracht hätte, und der Grad der Ueberzeugung, welcher dem Zeugnisse übrig bleibt, würde dem Grade der Wahrscheinlichkeit der bejahten Begebenheit proportional sein.

§. 19.

Aus diesem Satze folgt, dafs der Grad der Wahrscheinlichkeit, welcher durch Zeugnisse der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit hinzugefügt wird, in zusammengesetzter Verhältnifs ist: 1) des Ueberschusses der Einheit über die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit der bezeugten Begebenheit; 2) des Gewichts der Zeugnisse, welche die Begebenheit bejahen, oder des Ueberschusses des Gewichts derjenigen, welche sie bejahen, über das Gewicht derer, welche sie verneinen; 3) der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit der Begebenheit.

§. 20.

Lehrsatz 2. *Es bedeute $\frac{n}{m}$ die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, und P den Ueberschuss der Gewichte derjenigen Zeugnisse, welche sie bejahen, über das Gewicht derer, welche sie verneinen. Ich behaupte, es wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit durch diese Zeugnisse* $= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{m} \cdot P\right)$.

Beweis. Vermöge des vorhergehenden Satzes vermehren die Zeugnisse die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit der Begebenheit um den Grad $= \left(1 - \frac{n}{m}\right) . P . \frac{n}{m}$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit, die Zeugnisse zu Hülfe genommen, $\frac{n}{m} + \left(1 - \frac{n}{m}\right) . P . \frac{n}{m} = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) + \left(1 - \frac{n}{m}\right) . P . \frac{n}{m} = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \left(1 - \frac{n}{m} P\right)$. *W. Z. E.*

§. 21.

Ist das Gewicht der Zeugnisse 0, das heisst, ist $P = 0$; so verwandelt sich die eben gefundene Formel in $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)$ oder $\frac{n}{m}$; oder welches einerlei ist, so ist die Begebenheit auf ihre eigenthümliche Wahrscheinlichkeit gebracht. Wenn hingegen $P = 1$ ist; so wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^2$; hieraus folgt, dass eine Anzahl von selbst unverwerflichen Zeugnissen nicht hinreichend ist, eine Begebenheit

absolut gewiss zu machen, die es nicht schon durch sich selbst und unabhängig von Zeugnissen ist.

§. 22.

Ist die That für sich selbst gewiss, das heisst, ist ihre eigenthümliche Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{m} = 1$; so verwandelt sich die obige Formel in 1, was auch P für einen Werth haben mag. Ist hingegen $\frac{n}{m} = 0$; so verwandelt sich diese Formel in Null, was auch der Werth von P sein mag; hieraus folgt, dass eine an sich selbst für unmöglich erkannte Begebenheit durch eine Menge von unverwerflichen Zeugnissen keinen auch noch so geringen Grad von Wahrscheinlichkeit erhalten kann.

§. 23.

Lehrsatz 3. *Es heisse wiederum* $\frac{n}{m}$ *die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, und Q sei der Ueberschuss des Gewichts der Zeugnisse, welche diese Begebenheit verneinen, über das Gewicht der Zeugnisse, welche sie bejahen; so wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit, nach Hinzunehmung dieser Zeugnisse,*

$$1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{m} \cdot Q\right).$$

Beweis. Zu Folge des Satzes (§. 19.) vergrössern die Zeugnisse die Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{n}{m}$ der Nichtexistenz der Begebenheit, um den Grad von Wahrscheinlichkeit, welcher durch $\frac{n}{m} \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)$ ausgedrükt wird; also bekömmt man die Wahrscheinlichkeit der Nichtexistenz der Begebenheit, mit Hinzunehmung

der Zeugnisse, $= \left(1 - \frac{n}{m}\right) + \frac{n}{m} \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right) =$ $\left(1 - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{m} \cdot Q\right)$; und demnach wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit $= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \left(1 + \frac{n}{m} \cdot Q\right)$. *W. Z. E.*

§. 24.

Wenn das Gewicht der Zeugnisse Null ist, das heisst, wenn $Q = 0$ ist; so verwandelt sich die nur gefundene Formel in $\frac{n}{m}$ und die Begebenheit kommt auf ihre eigenthümliche Wahrscheinlichkeit herab. Wenn $Q = 1$, so verwandelt sich diese Formel in $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(1 + \frac{n}{m}\right) = 1 - 1 + \frac{n^2}{m^2} = \frac{n^2}{m^2}$; hieraus folgt, dass irgend eine Anzahl von auch unverwerflichen Zeugnissen nicht gänzlich die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit vernichten kann, die nicht absolut unmöglich ist,

§. 25.

Ist $\frac{n}{m} = 0$; so wird die Formel auch 0. Ist $\frac{n}{m} = 1$; so verwandelt sie sich ebenfalls in 1, hieraus folgt, dass eine Zahl von Zeugnissen, welche ein Faktum verneinen, wenn sie auch unverwerflich wären, die Gewissheit nicht vermindern kann, welche dieses Faktum a priori oder auch durch die Erfahrung erhält.

§. 26.

Wenn allgemein $\frac{n}{m}$ die von Zeugnissen unabhängige Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit bedeutet;

ferner $1-A$ das Gewicht der Zeugniſſe darſtellet, welche dieſe Begebenheit bejahen; und $1-B$ das Gewicht der Zeugniſſe, welche ſie verneinen; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, nach Hinzunehmung der Zeugniſſe, wie auch dieſelben beſchaffen ſein mögen, allezeit $\left[1-\frac{n}{m}\right] \cdot \left[1-\frac{n}{m}.(B-A)\right]$ ſein. Denn $B-A$ iſt der Ueberſchuſs des Gewichts der bejahenden Zeugniſſe über das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe; und $A-B$ der Ueberſchuſs des Gewichts der verneinenden Zeugniſſe über das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe. Setzt man alſo $B-A$ anſtatt P in der Formel $1-\left[1-\frac{n}{m}\right] \cdot \left[1-\frac{n}{m}.P\right]$ welche im zweiten Lehrſatze (§. 20.) gefunden worden iſt, ſo verwandelt ſich dieſe Formel in

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right] \cdot \left[1-\frac{n}{m}.(B-A)\right].$$

Eben ſo erhält man, wenn man in der Formel $1-\left[1-\frac{n}{m}\right] \cdot \left[1+\frac{n}{m}.Q\right]$ des dritten Lehrſatzes (§. 23.) $A-B$ anſtatt Q ſchreibt, wiederum

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right] \cdot \left[1+\frac{n}{m}.(A-B)\right] =$$

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right] \cdot \left[1-\frac{n}{m}.(B-A)\right].$$

§. 27.

Aus den Sätzen (§. 21. und 24.) folgt, daſs der Bruch $\frac{n}{m} \cdot \left[1-\frac{n}{m}\right]$ zugleich die gröſst mögliche Vermehrung iſt, welche die Zeugniſſe, die ein Faktum behaupten, zu der eigenthümlichen Wahrſcheinlichkeit dieſes Faktums hinzuſetzen können; und auch die

gröſste Verminderung iſt, welche eben dieſe Wahrſcheinlichkeit durch die Zeugniſſe, die das Faktum leugnen, erhalten kann. Denn wenn x die gröſst mögliche Vermehrung dieſer Wahrſcheinlichkeit bedeutet, ſo hat man $\frac{n}{m} + x = 1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^2 = 1 - 1 + 2 . \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2}$, woraus folgt $x = \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m} . \left[1 - \frac{n}{m}\right]$.

Eben ſo bekömmt man, wenn y die gröſst mögliche Verminderung eben dieſer Wahrſcheinlichkeit genannt wird, $\frac{n}{m} - y = \frac{n^2}{m^2}$; alſo $y = \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m} . \left[1 - \frac{n}{m}\right]$.

§. 28.

Die zwei eben angeführten Sätze zeigen, daſs alle möglichen Zeugniſſe für oder wider ein Faktum, nicht hinreichen, bei demſelben eine richtige Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, wenn man ſonſt keinen Weg weder durch bloſse Schlüſſe, noch durch Erfahrungen hat, um dieſem Faktum einen eigenthümlichen Grad von Wahrſcheinlichkeit beizulegen; weil auch unverwerfliche Zeugniſſe nicht hinreichend ſind, weder ein ſehr wahrſcheinliches Factum gänzlich gewiſs zu machen, noch die abſolute Unmöglichkeit einer Sache von einer ſehr geringen Wahrſcheinlichkeit zu behaupten.

§. 29.

Könnte alſo einem Faktum kein eigenthümlicher Grad von Wahrſcheinlichkeit beigelegt werden, ſo würde man einen Irrthum begehen, wenn man für die Wahrſcheinlichkeit dieſes Faktums, entweder das Gewicht der Zeugniſſe, welche ſolches bejahen, oder den Ueberſchuſs des Gewichts derjenigen, welche bejahen, über das Gewicht derer, welche verneinen, annehmen

wollte. Ein einziges Beispiel wird genug sein, um sich davon zu überzeugen. Man nehme an, daſs eine Begebenheit von dieser Art durch Zeugnisse behauptet worden, deren Gewicht $\frac{2}{3}$ ist, und durch Zeugnisse verneint worden, deren Gewicht $\frac{1}{3}$ ist; nähme man nun $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{3}$ für die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit an; so würde $1 - \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ die Wahrscheinlichkeit sein, daſs die Begebenheit nicht vorhanden ist. Derowegen wären die Wahrscheinlichkeiten von bejahten sich widersprechenden Begebenheiten in verkehrter Verhältniſs der Gewichte der Zeugnisse, welche sie bejahen: welches offenbar ungereimt ist. Diese Bemerkung zeigt deutlich das Unzureichende der Autoritäten, um Muthmaſsungen auf Begebenheiten zu gründen, deren Natur zu untersuchen weder die Vernunft, noch auch die Erfahrung irgend ein Mittel an die Hand geben, und deren Wahrscheinlichkeit unabhängig von diesen Autoritäten zu schätzen wir nicht im Stande sind.

§. 30.

Der den Zeugnissen bisher zugeschriebene Einfluſs auf die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Begebenheiten setzet voraus, daſs der Zeuge durch seine eigene Person der Sache, welche er bejahet, Bestätigung zu geben meint, und sie selbst für gewiſs hält. Wenn selbige aber für den, der mir sie berichtet, nur wahrscheinlich ist, welches der Fall sein würde, wenn er sie selbst von einem andern Zeugen erhalten hätte; so ist alsdann die Wahrscheinlichkeit, welche die Sache durch das Zeugniſs erhält, aus der Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses, das mir sie berichtet, und der Wahrscheinlichkeit des vorgängigen Zeugnisses, welches zu diesem Gelegenheit gegeben hat, zusammengesetzt. Man setze also die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit,

$\frac{n}{m}$; das Gewicht des Zeugnisses, das mir sie berichtet hat, $\frac{b}{a}$; das Gewicht des vorgängigen Zeugnisses, $\frac{d}{c}$: so wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit vermöge dieser Zeugnisse, $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}$.

Und wenn des vorgängigen Zeugen sein Zeugniss auch nicht als unmittelbar die Sache bestätigend angesehen werden kann, indem selbiger es von einem dritten Zeugen erhalten hätte, dessen Gewicht $\frac{g}{f}$ ist; so wird die Wahrscheinlicheit der Begebenheit $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{g}{f}$; Und so weiter.

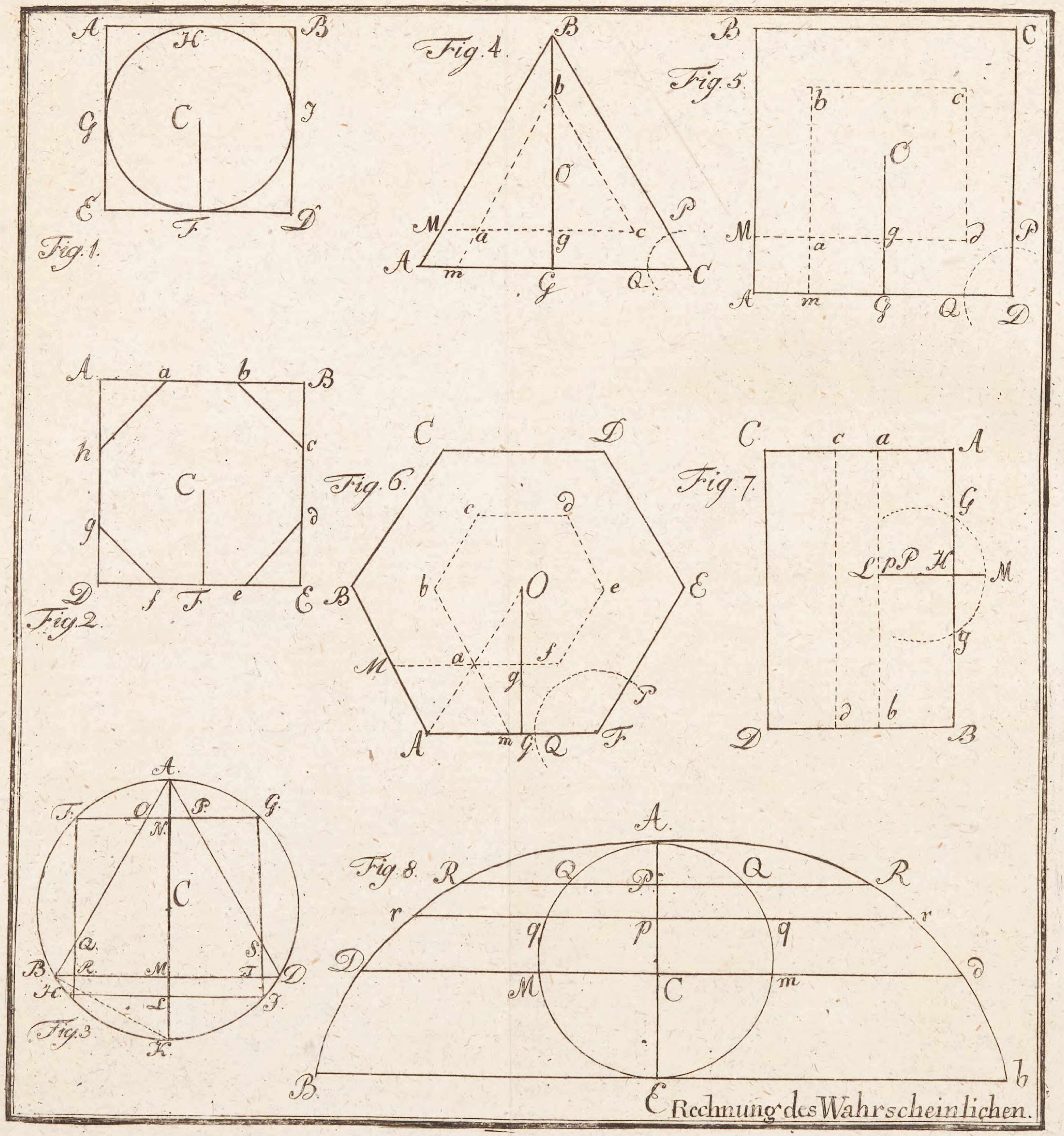
§. 31.

Ein Zeugniss, welches in Beziehung auf ein anderes Zeugniss, das ich selbst directe erhalten habe, abgelegt worden, setzet dem Gewichte dieses Zeugnisses, das ich erhalten habe, nichts hinzu. Wenn mir durch Peter ein gewisses Faktum bekräftigt worden ist, so setzet Paul, welcher das nämliche Zeugniss vom Peter erhalten hat, indem er mir selbiges berichtet, dem Einflusse des von dem Peter abgelegten Zeugnisses auf die Wahrscheinlichkeit, die ich von der Sache habe, nichts hinzu.

§. 32.

Ein authentisch in einer Schrift aufgezeichnetes Zeugniss behält die Wahrscheinlichkeit, welche es im Anfange hatte, als es mündlich von dem Zeugen abgelegt wurde; und zwar so lange, als die Aechtheit der Schrift gewiss bleibt. Wenn aber diese Aechtheit nur noch wahrscheinlich ist, so muss das Gewicht des Zeugnisses mit der Wahrscheinlichkeit der Authentizität der Schrift, worin es aufgezeichnet ist, multiplicirt werden.

E N D E.



Rechnung des Wahrscheinlichen.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bicquilley, Charles François <<de>>,

Die Rechnung des Wahrscheinlichen

Leipzig 1788

Coburg, Landesbibliothek -- E I 8/6
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942598-9